令和４年度数学コンクール事前問題（参考資料）

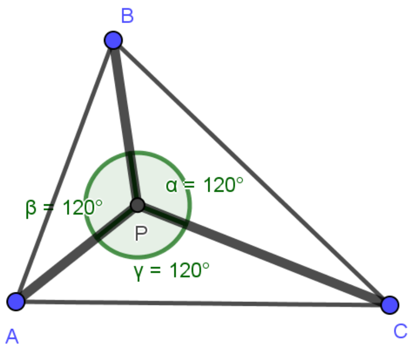
Ⅰ　任意の３点 A，B，C を結ぶ最短ネットワークについて

（１）△ABC の最大角が 120°未満の場合

△ABC のフェルマー点を P とすると，PA＋PB＋PC が最小となる。

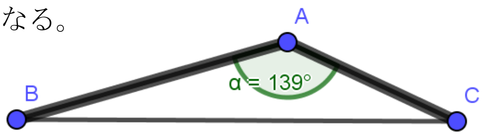
（フェルマー点とは，下図のように　∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°　を満たす点）

※問題文の「任意の分岐点を付け加えてよいものとする」とは，このような点 P を加えること。



（２）△ABC の最大角が 120°以上の場合

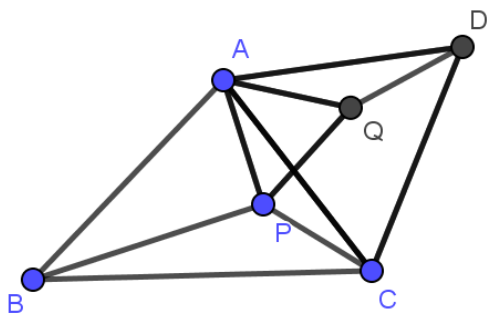
最大角を A とすると，AB+AC が最小となる。



（証明）

（１）三角形 ABC の最大角が 120°　未満のとき

平面上の任意の点 P と頂点 C を A を中心として反時計回りに 60°　回転させた点を Q，D とおく。三角形 APQ，ACD は頂角が 60°　の二等辺三角形なので，正三角形となる。



また，三角形 APC と AQD は 2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので合同になり，PC=QD。

よって

$$AP+BP+CP=BP+PQ+QD \geqq BD$$

等号が成立するのは B，P，Q，D がこの順に 1 直線上にあるときで，AP＋BP＋CP の最小値 BD をとる。このとき

$\angle APB=180^\circ-\angle APQ=120^\circ$

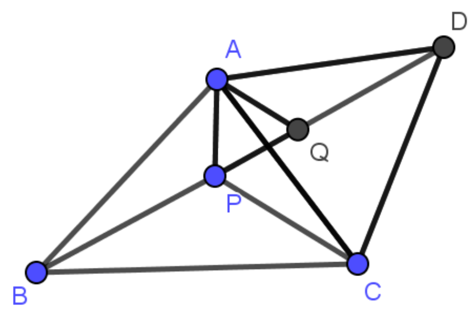
$\angle APC=\angle AQD=180^\circ-\angle AQP=120^\circ$

$\angle BPC=360^\circ-\angle APB-\angle APC=120^\circ$

が成り立つ。

またこのとき，$BD=BP+PQ+QD$

$=PB+PA+PC$　　が成り立つ。



（2）三角形 ABC の最大角が 120° 以上のとき（∠BAC≧120° とする）

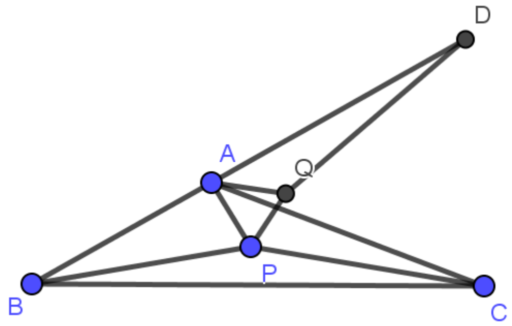
θ ＝180° －∠BAC とする。

平面上の任意の点 P と頂点 C を A を中心として反時計回りに θ 回転させた点を Q，D とおく。

このとき　$\theta \leqq 60°$ より　AP≧PQ　であるから

AP+BP+CP≧BP+PQ+QD≧BD＝BA+AD＝AB+AC

が成り立つ。よって P をどこにとっても AB+AC より短くなることはない。



（証明終わり）

【フェルマー点の作図方法】

（最大角が 120° より小さいとき）

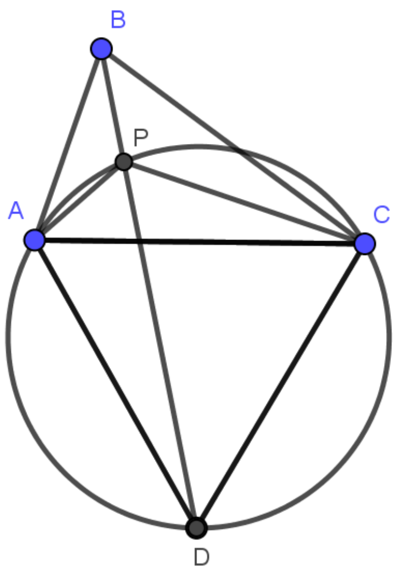
辺 AC を一辺とする正三角形 ACD を（三角形の外側に）に描く。△ACD の外接円を描き，その外接円と線分 BD の交点がフェルマー点 P である。

このとき，　∠APC＝180° －∠ADC＝120°　（円に内接する四角形の性質）

∠APD＝∠ACD＝60° より∠APB＝180° －∠APD＝120°

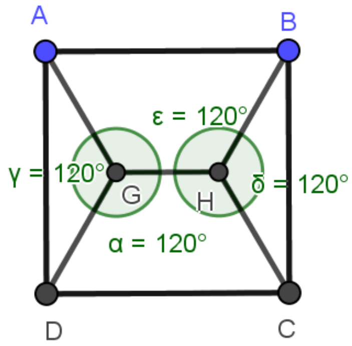
同様に　∠BPC＝120° が成り立つ。

またこのとき，PA＋PB＋PC＝BD が成り立つ。（上記の証明より）



Ⅱ　正方形の頂点 A，B，C，D を結ぶ最短ネットワークについて

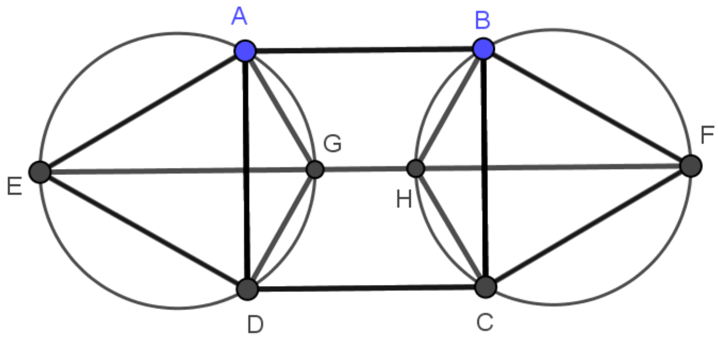
正方形 ABCD の内部に 2 点のフェルマー点 G，H が存在し， AG＋BH＋CH＋DG＋GH が 4 点 A，B，C，D を結ぶネットワークの最小値となる。



（作図手順）

辺 AD を一辺とする正三角形 ADE を（正方形の外側に）に描く。辺 BC を一辺とする正三角形 BCF を（正方形の外側に）描く。△ADE と△BCF の外接円をそれぞれ描き，2 つの外接円と線分 EF の交点をそれぞれ G，H とする。（G，H がフェルマー点となる）

※このとき，最小値 AG＋BH＋CH＋DG＋GH は，線分 EF の長さと一致する。



（考え方） 辺 AD を一辺とする正三角形 ADE を描き、3 点 BCE についてのフェルマー点 H が作図できる（2 点 A，D を 1 点 E に置き換えることで， 3 点に関するフェルマー点の作図ができる）。次に， 3 点 ADH についてのフェルマー点 G が作図できる。

※ 3 点についてのフェルマー点の作図に帰着させることがポイントである。

（証明）

AG＋BH＋CH＋DG＋GH が最短ネットワークであることを次の手順で示す。

（ⅰ）頂点を 3 辺で結んだネットワークは最短ではない。

（ⅱ）分岐点がただ 1 つのネットワークは最短ではない。

（ⅲ）分岐点が 2 つのネットワークは，2 つのフェルマー点を経由する場合が最短である。

（ⅳ）分岐点が 3 つ以上のネットワークは最短とはならない。

（ⅰ）4 つの頂点を 3 辺で結んだ場合

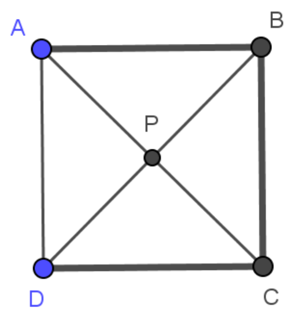
$$AB+BC+CD=3AB$$

一方，正方形 ABCD の対角線の交点を P とすると，

$$AP+BP+CP+DP=2\sqrt{2}AB$$

よって　$AB+BC+CD>AP+BP+CP+DP$　が成り立つ。

すなわち，頂点を 3 辺で結ぶネットワークは最短ではない。



(ⅱ) 平面上の任意の点を Q とすると，

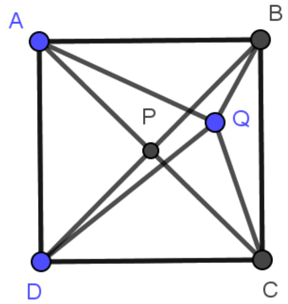
$AP + CP \leqq AQ + CQ$

$BP + DP \leqq BQ + DQ$

であるから，

$AP + BP + CP + DP \leqq AQ + BQ + CQ + DQ$ ……①

が成り立つ。



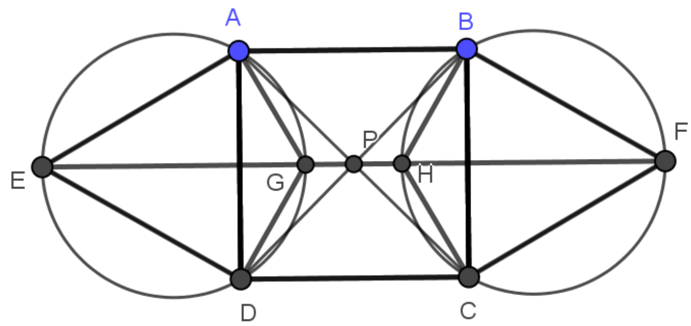
よって，分岐点が 1 点の場合は，対角線の交点を経由する場合が最短となる。

ここで，△ADP のフェルマー点を G とすると

$AG + DG + GP < AP + DP$

同様に，△BCP のフェルマー点を H とすると

$BH + CH + HP < BP + CP$



よって，

$AG + BH + CH + DG + GH < AP + BP + CP + DP$ ……②

すなわち，対角線の交点を経由するより，2 つのフェルマー点 G，H を経由した方が短いネットワークになる。

①，②より，分岐点がただ 1 つのネットワークは最短ではない。

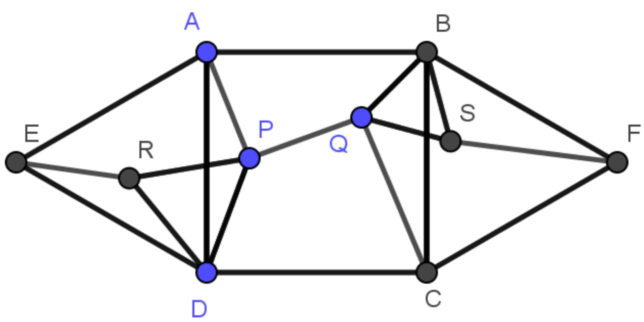
(ⅲ) 平面上に任意の点 P，Q をとる。(2 点を分岐点にもつ場合を考察する)

点 P と頂点 A を点 D を中心に 60° 反時計回りに回転した点をそれぞれ R，E とおく。

同様に，点 Q と頂点 C を点 B を中心に 60° 反時計回りに回転した点をそれぞれ S，F とおく。

このとき△DPR と△BQS はともに正三角形となるから，DP＝RP，BQ＝QS が成り立つ。

また，△ADP と△EDR は，2 辺とその間の角がそれぞれ等しいので合同になり，ER=AP が成り立つ。同様に，△BCQ と△BFS も合同になり，CQ＝FS が成り立つ。



したがって，

$AP + DP + PQ + BQ + CQ = ER + RP + PQ + QS + SF \geqq EF$ ……③

となる。

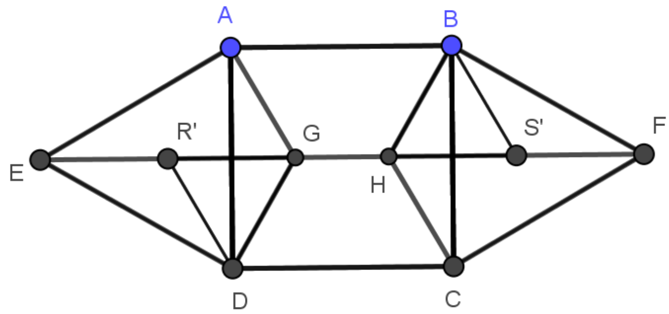
等号が成立するのは R，P，Q，S が直線 EF 上にあるときである。

このとき，下図のように直線 EF 上にある 4 点を R’，G，H，S’ とすると，

AG+DG+GH+BH+CH＝ER’+R’G+GH+HS’+S’F＝EF ……④

であるから，

③と④より，AP+DP+PQ+BQ+CQ≧AG+DG+GH+BH+CH（＝EF）



以上より，2 点の分岐点 P，Q を経由するネットワークの中では，2 つのフェルマー点 G，H を経由するネットワークが最小である。

(ⅳ)「4 点 A，B，C，D 以外の 3 点以上の分岐点を経由するネットワークが最小になることはない」ことを示す。

まず, 最短となるネットワークにおける分岐点から出る線分の本数は少なくとも 3 本である。もし,分岐点 P から出る線分が QP と RP の 2 本だとしたら，P を経由せずに QR を結んだ方が短いネットワークとなる。もちろん分岐点からでる線分が 1 本ということはない。

ここで，最短ネットワークが k 個の分岐点を経由するとき，ネットワークの本数は 4＋ k −1 本であり，ネットワークの各線分は 2 頂点を結び，かつ分岐点からでる線分は少なくとも 3 本，正方形の 4 つの頂点からでる線分は少なくとも 1 本である。したがって

$$2(4+k-1)\geqq 3k+4$$

よって， $k\leqq 2$ でなければならない。

すなわち，最短ネットワークとなる分岐点の個数が 3 個以上になることはない。

以上 (ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)(ⅳ)より，2 つのフェルマー点 G，H を経由するネットワークが最短で長さの最小値 AG＋BH＋CH＋DG＋GH =EF をとる。