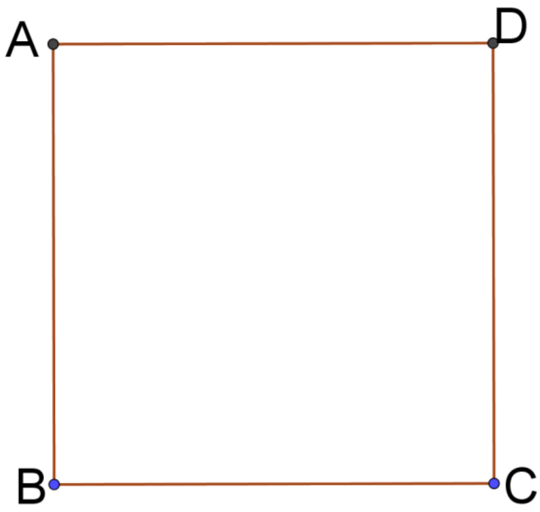
当日問題１（正方形の成立条件）

以下の条件で正方形が成り立つか考察せよ。

必ず成り立つ場合は証明をし、反例がある場合は作図と証明をかけ。

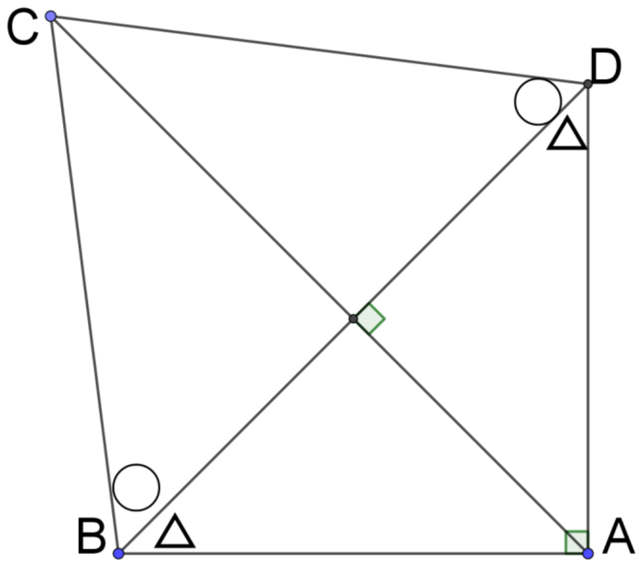


（問題１）∠Ａ＝９０°，∠Ｂ＝∠Ｄ，ＡＢ＝ＡＤ，ＢＣ＝ＣＤ

（問題２）∠Ａ＝９０°，∠Ｃ＝∠Ｄ，ＡＢ＝ＣＤ，ＣＤ＝ＤＡ

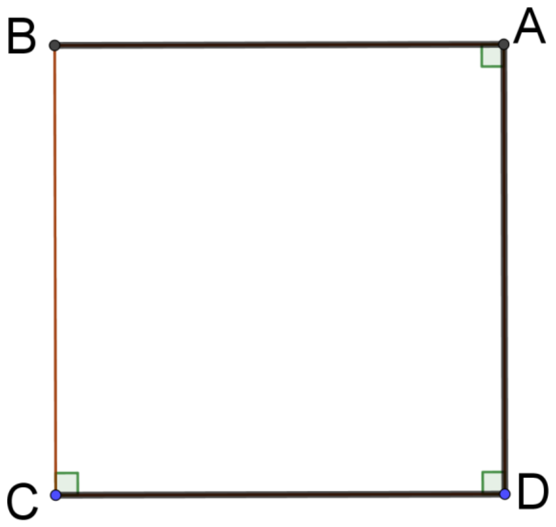
（問題３）∠Ａ＝９０°，∠Ｂ＝∠Ｄ，ＡＢ＝ＢＣ，ＡＣ＝ＢＤ

（解答１）　反例（たこ型）
①直角二等辺三角形ＡＢＤを作図する。
②辺ＢＤの垂直二等分線を引く
③垂直二等分線上に点Ｃを置く（点Ａとは逆側に）

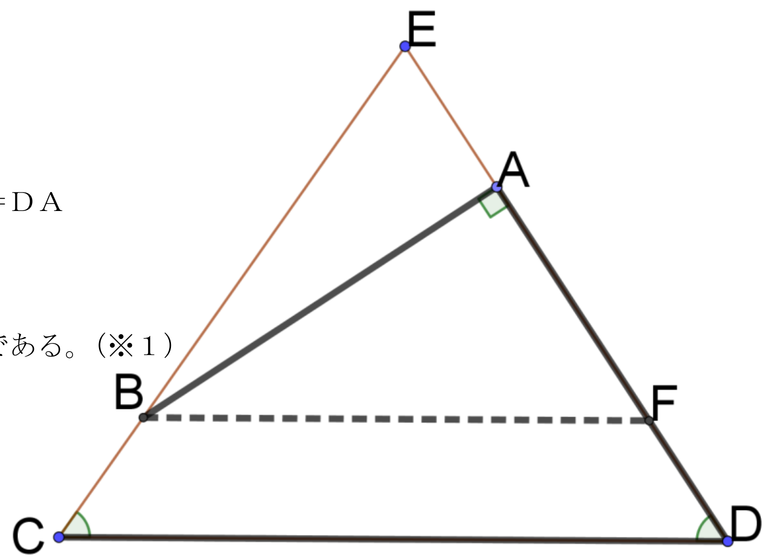


（証明）
点Ｃは垂直二等分線上にあるのでＢＣ＝ＣＤより
△ＢＣＤは二等辺三角形である。
つまり、∠ＣＢＤ＝∠ＣＤＢ，ＢＣ＝ＣＤ。
また、△ＡＢＤは直角二等辺三角形なので
∠ＡＢＤ＝∠ＡＤＢ，ＡＢ＝ＡＤ。
よってＡＢ＝ＡＤ，ＢＣ＝ＣＤ，
∠ＡＢＣ＝∠ＡＢＤ＋∠ＣＢＤ＝∠ＡＤＢ＋∠ＣＤＢ＝∠ＡＤＣである。

（解答２）成立する
∠Ｃ＝∠Ｄ＝９０°なら∠Ｂ＝９０°であり、ＡＢ＝ＡＤ＝ＤＣなので正方形である。
よって∠Ｃ＝∠Ｄ≠９０°の場合を考察する。



（１）∠Ｃ＝∠Ｄ＜９０°の場合
右の図のように各点を定める。（ＢＦ//ＣＤ）
この図で条件
∠Ａ＝９０°，∠Ｃ＝∠Ｄ，ＡＢ＝ＣＤ，ＣＤ＝ＤＡ
が成り立つか考察をする。
ＢＦ//ＣＤなのでＣＤ＞ＢＦである。
また、△ＡＢＦは直角三角形なのでＢＦ＞ＡＢである。（※１）
しかし、ＡＢ＝ＣＤなので矛盾が生じる。



※１

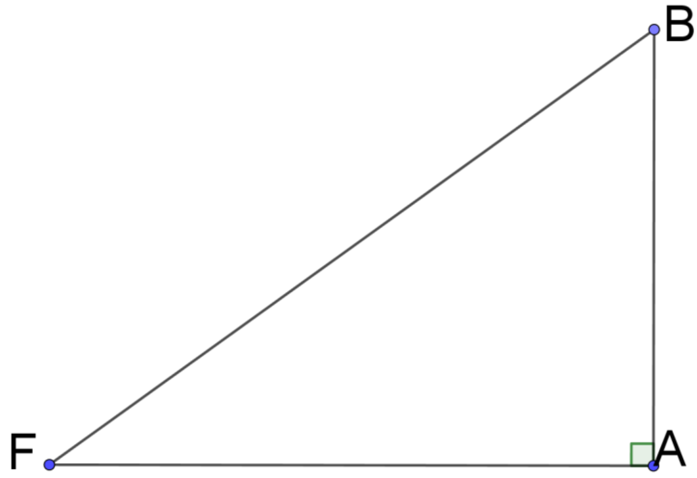
$BF^2 = AF^2 + AB^2$

$AF^2 > 0, AB^2 > 0$より

$BF^2 > AF^2, BF^2 > AB^2$

よって

$\mathrm{BF} > \mathrm{AF}, \mathrm{BF} > \mathrm{AB}$



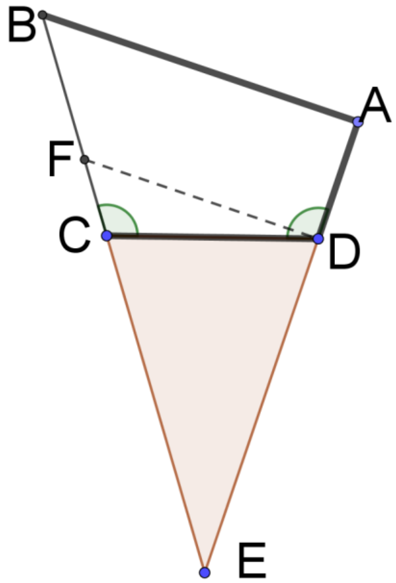
（２）∠Ｃ＝∠Ｄ＞９０°の場合

右の図のように各点を定める。（ＡＢ//ＤＦ）

ＡＢ//ＤＦなのでＡＢ＞ＤＦである。

また、△ＣＤＦは鈍角三角形なのでＤＦ＞ＣＤである。（※２）

しかし、ＡＢ＝ＣＤなので矛盾が生じる。



（１）（２）から∠Ｃ＝∠Ｄ＝９０°なので

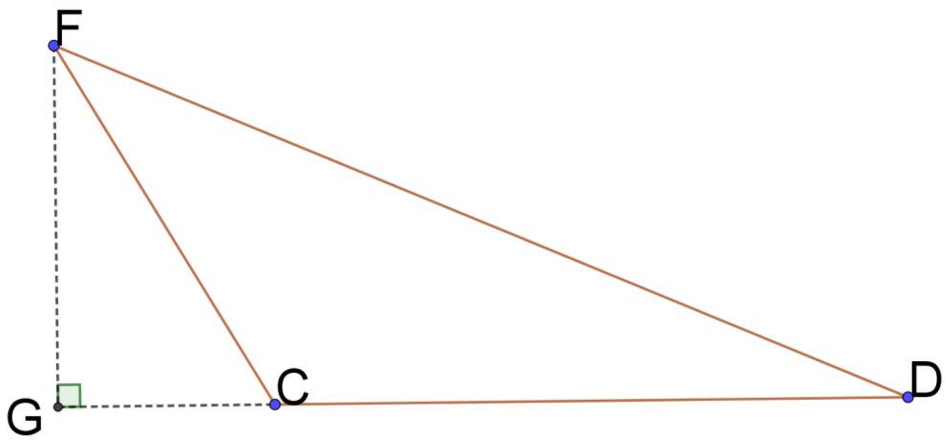
正方形が必ず成り立つ。

※２

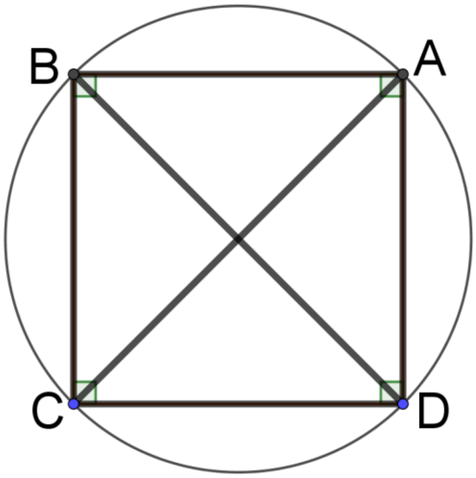
ＤＦ＞ＧＤ＝ＧＣ＋ＣＤ

なので

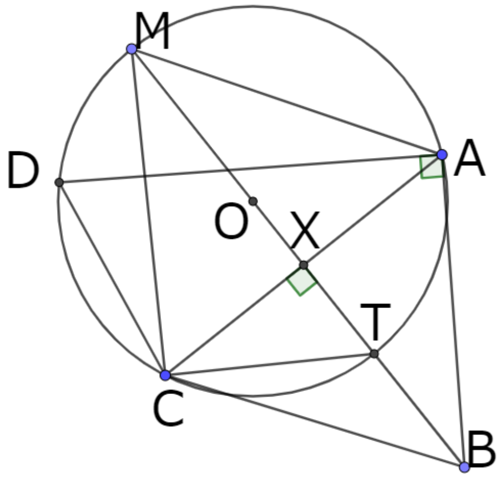
ＤＦ＞ＣＤ



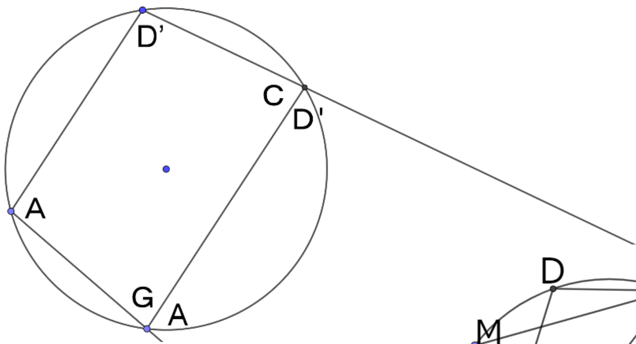
（解答３）
△DAC の外接円をかいたとき、この円は
①点Ｂを通る場合
②点Ｂを通らない場合
がある。



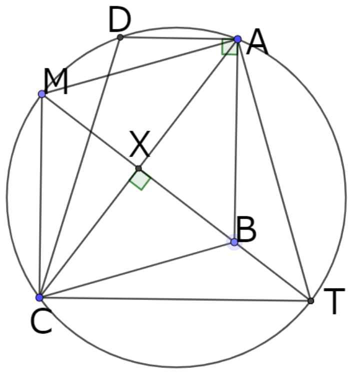
①　点Ｂを通る場合
四角形 ABCD は円に内接し、∠A＝９０°より∠C＝９０°
∠B＋∠D＝１８０°，∠B＝∠D なので∠B＝∠D＝９０°
よって四角形 ABCD は長方形である。ここで、AB=BC なので
四角形 ABCD は正方形である。



②　点Ｂを通らない場合
AB=BC なので点Ｂと外接円の中心Ｏは
AC の垂直二等分線上に存在する。
よって∠MCT＝９０°
さらに、△BCX≡△BAX、△BCM≡△BAM、∠ABC＝∠CMA なので
AB=BC=CM=MA であることから四角形 ABCD はひし形である。
このことから AB//MC であるので∠BAC＝∠ACM。
つまり∠DAC＝９０°－∠BAC＝∠MCT－∠ACM＝∠ACT なので
AD//CT である。



さらに４点 A、D,C,T は円周上にあるので
四角形 ADCT は等脚台形である。
※３
∠D‘＋∠G＝∠C＋∠D’＝１８０°
∠G＝∠C
∠D’＋∠G＝∠A＋∠G＝１８０°
∠D’＝∠A



よって AC=DT である。過程から AC=BD なので DT=BD であるから
△BTD は二等辺三角形である。
しかし、△BCX は直角三角形なので
点Ｂが外接円の外部にある場合は∠DTB は鈍角、∠DBT は鋭角
点Ｂが内部にある場合は∠DTB は鋭角、∠DBT は鈍角
であるので矛盾である。
つまり、点Ｂは点Ｔと一致しなければならない。
以上から４点 A,B,C,D は△ACD の外接円上に存在するので∠B＋∠D＝１８０°である。
∠B＝∠D、∠A=９０°より∠C＝９０°であり、AB=BC なので正方形である。