

当日問題 2 (周の長さが最小となる展開図)

課題 1

縦 11 cm 、横 23 cm 、高さ 5.5 cm の直方体の箱を切り開いて展開図を作るとき、周の長さが最短になる展開図と、そのときの周の長さを求めよ。(必ずしも直方体の辺に沿って切ったものでなくてもよい。)

展開図は、与えられた用紙を用いて作成(作図)せよ。その際、1枚の紙に作図するかわりに、パーツごとに作図したものを切り取り、張り合わせて作成することも可とする。

課題 2

一辺が 10 cm の正四面体の展開図のうち、周の長さが最短になる展開図と、そのときの周の長さを求めよ。(必ずしも正四面体の辺に沿って切ったものでなくてもよい。)

展開図は、与えられた用紙を用いて作成(作図)せよ。その際、1枚の紙に作図するかわりに、パーツごとに作図したものを切り取り、張り合わせて作成することも可とする。

※それぞれの課題の解答用紙の余白に、展開図の周の長さが短くなるように工夫したことを記述してください。

(参考)

展開図とは、ある1点を基準としてその点から立体を切り開いて一平面に伸ばしたもの。

『ウィキペディア (Wikipedia)』より

【解答例】

課題1 次の2つの展開図が、周の長さを最小とする。

このとき、周の長さの最小値は $90 + 22\sqrt{3}$ (cm) (約128.1 cm)

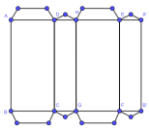


図1

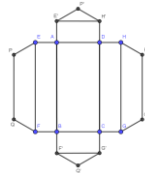
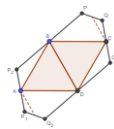


図2

課題2



周の長さの最小値は $20\sqrt{7}$ (cm) (約52.9 cm)

【解説】

展開図は直方体（または正四面体）の面をいくつかの線分に沿って切って得られますが、それらの線分の集まりを切断線とよぶことにします。

切断線を構成する線分は、展開図の境界線上で2箇所ずつに現れますから、展開図の周の長さは、切断線の総長（長さの和）の2倍です。したがって、**周の長さを最小とするためには、切断線の総長を最小にすることを考えればよいこと**になります。

ここで、切断線のもつべき性質について考察します。

例えば、直方体の8つの頂点を平面に広げるためには、切断線は直方体の8頂点を含まなければなりません。さらに、表面全体を1つの平面に広げられるためには、切断線は1つの連結な（つながった）図形でなければなりません。また、切断線が環状（輪のような）の構造をもつと、直方体は2つ以上の断片に分かれてしまいます。

よって、**最短の切断線を求めることは、直方体（または正四面体）のすべての頂点を結ぶ最短ネットワークを求める問題**に帰着されます。

課題1の考察（直方体の場合）

直方体の展開図（図1）において、8つの頂点A, B, C, D, E, F, G, Hを結ぶ最短ネットワークを考えます。

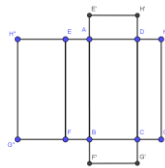


図1

ここで、どの面も長方形であるから、頂点以外の分岐点を経由して最短経路で結ぶとすると、必ず2点のフェルマー点を経由する必要があります。（四角形の最短経路の考察により。）

ここで、もし隣り合う2つの面（の頂点）がともに2つずつのフェルマー点で結ばれるとすると、環状の（輪のような）経路が存在することとなり、展開図としては不適となります。

ゆえに、最短経路となる場合では、2つのフェルマー点を経由する面は、隣り合わない（すなわち向かい合う）2つの面についてか、ただ一つの面についての場合に限ります。

(1) 向かい合う2つの面の頂点をそれぞれ2つのフェルマー点を経由して結ぶ場合

向かい合う面の組み合わせとして、図3～図5の3通りが考えられ、図3の面積の最も小さい向かい合う2つの長方形において、それぞれ2つのフェルマー点を経由したネットワークをつくり、それらを最も長い辺を用いて結んだネットワークが最小となります。(図3の切断線で切り開いた展開図が解答例の図1になります。)

(図3の切断線の長さの総和は、 $45 + 11\sqrt{3} \approx 64.0 \text{ cm}$)

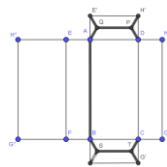


図3

(図4の切断線の長さの総和は $57 + 11\sqrt{3} \text{ cm}$)

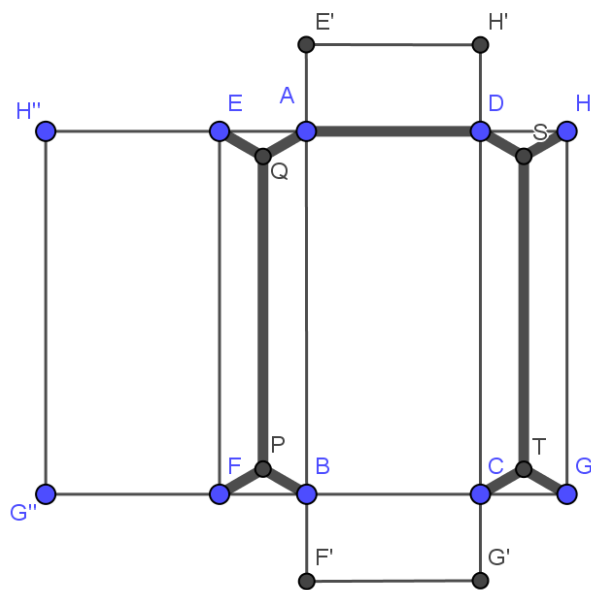


図4

(図5の切断線の長さの総和は $10\sqrt{3} + 22\sqrt{3}\text{ cm}$)

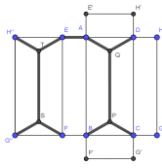


図5

(2) 1つの面の頂点のみ、2つのフェルマー点を経由して結ぶ場合

1つの面の選び方は、図6～図8の3通りがあり、図6の最も面積が大きい面の4頂点を（フェルマー点を経由した）ネットワークで結んだあと、長さが最も短い4辺で残りの頂点を結んだケースが最小となります。（図3の切断線の長さの総和と一致する）

(図6の切断線の長さの総和は、 $45 + 11\sqrt{3} \approx 64.0\text{ cm}$)

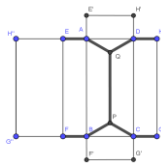


図6

(図 7 の切断線の長さの総和は、 $6\sqrt{3} + 11\sqrt{3}/2$ cm)

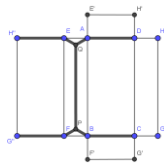


図 7

(図 8 の切断線の長さの総和は、 $10\sqrt{3} + 11\sqrt{3}/2$ cm)

※点 E および点 H で繋がっている

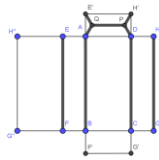


図 8

課題 2 の考察 (正四面体の場合)

正四面体の展開図において、4 頂点を結ぶ最短ネットワークは図 9 のようになります。
ここで、2 点 F, G はフェルマー点です。
(この切断線で切り開いた展開図が解答例になります。)

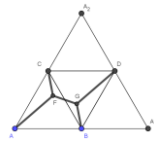


図 9

参考文献

秋山 仁・酒井利訓, シュプリンガー数学コンテストから学ぶ 数学発想レクチャーズ,
丸善出版, 2016