お見合いの確率

2年4組1班

１. 研究に至った経緯

数学の課題研究を始めるにあたり、テーマを考える際にお見合いで最もいい相手と結婚するには？というテーマを見つけ、一見数学とは無縁のテーマだと思ったがこれを数学的に証明できるというのを知り、面白そうだと思い研究を始めた。

２．研究の目標

・数学的にお見合いで最もいい相手を選ぶ方法や確率を証明する

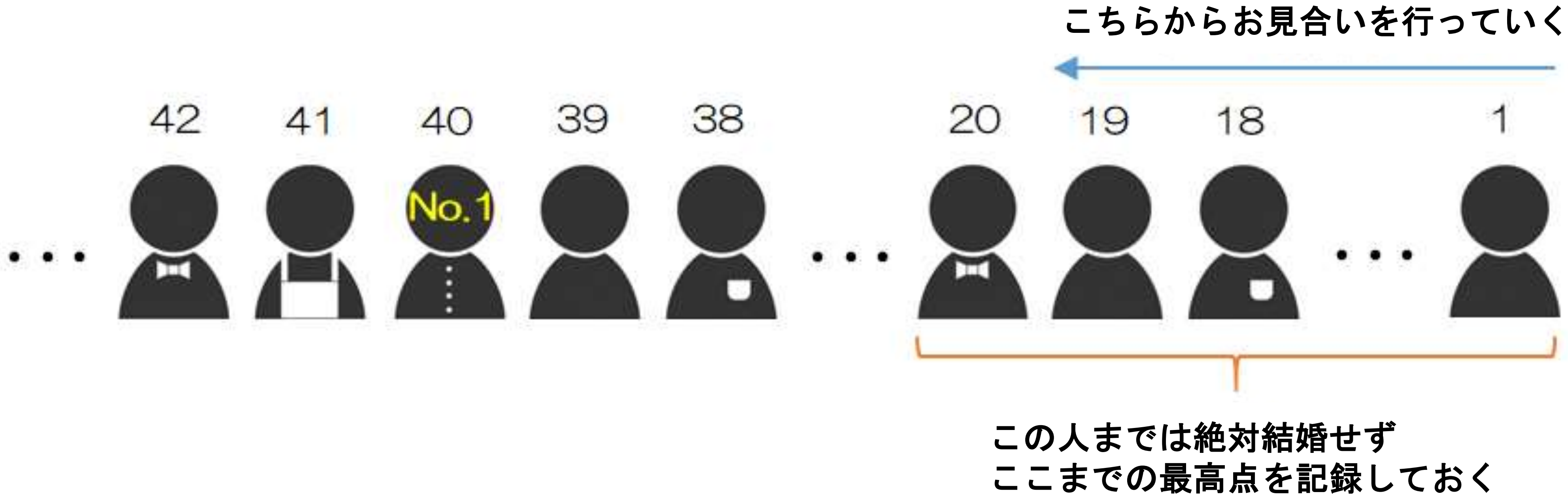
・証明するだけでなく、普段の生活にも生かせるようにする

３．研究の方法

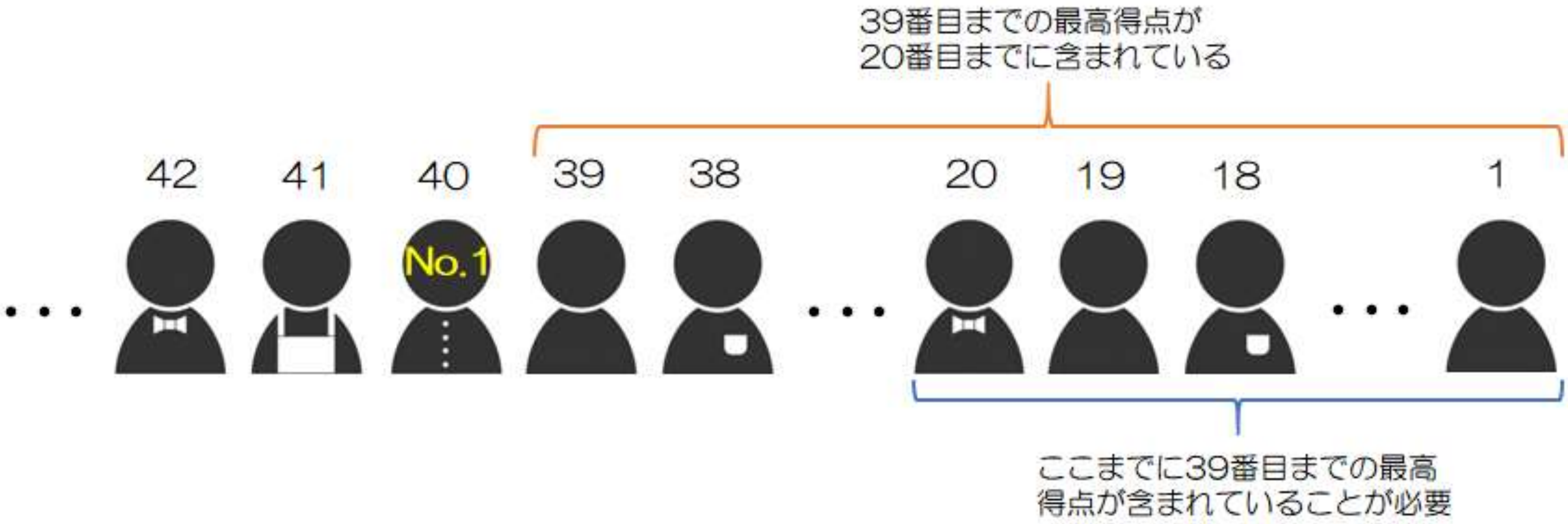
＜研究する上での条件＞
・必ず一人の結婚相手を決める
・お見合いする人数ｎ(候補者数)は事前に決められている
・お見合いの直後に結婚するかしないかを決定する
(ｎ-1人目までに決定しなかった場合は、無条件でｎ人目の人と結婚する)
・候補者側は拒否をしない
・結婚相手が決まった時点で終了する
・過去にさかのぼって結婚相手を選ぶことはできない
(スルーした人とは二度と会うことはできない)
・候補者を同時に評価すれば、必ず１～ｎ位の順位が付き、同率順位は存在しない
・どの順番でどの順位の候補者が現れるかはわからない

＜具体的な計算＞

①ｎ＝１００のとき
スルーする人数を２０人とする
最もいい相手が４０人目にいるとする



この時に最もいい相手を選べるのは、３９番目までの最高得点が２０番目までに含まれていることが必要である

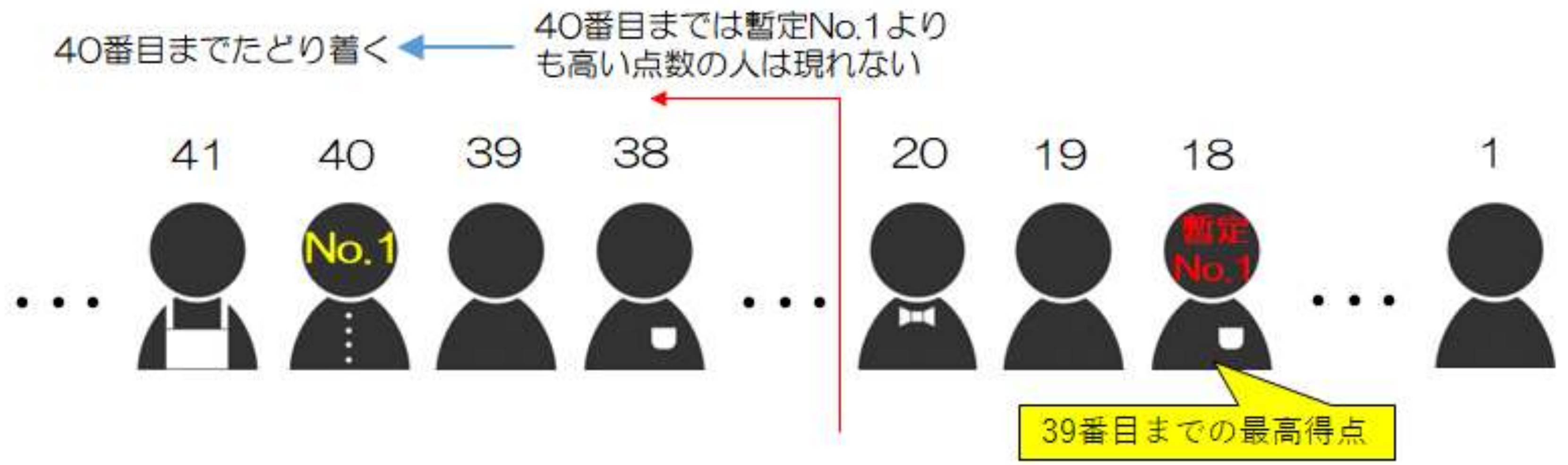


例えば、１８番目に３９番目までの最高得点のひとがいたとする

この人のことを暫定ナンバーワンと呼ぶ

すると、２０番目までに無条件にスルーしたときに最高得点は、暫定ナンバーワンの点数になってしまう

３９番目までの最高得点が暫定ナンバーワンの点数ということはそのあと４０番目の真のナンバーワンへたどり着くまでこの点数を超える人はいない



では、暫定ナンバーワンが２０番目までにいない場合はどうか

例えば、３８番目に暫定ナンバーワンがいたとする

このときは４０番目の真のナンバーワンまでたどり着けない

なぜかというと２０番目までで、決まった最高得点が必ず３８番目の暫定ナンバーワンで更新されてしまい、暫定ナンバーワンを選んでしまうことになるからである

つまり、４０番目にナンバーワンがいて２０番目までを無条件にスルーする場合ナンバーワンを選ぶための条件は、２０番目までに３９番目までの最高得点者がいることとなるのである

なるほどね！♡

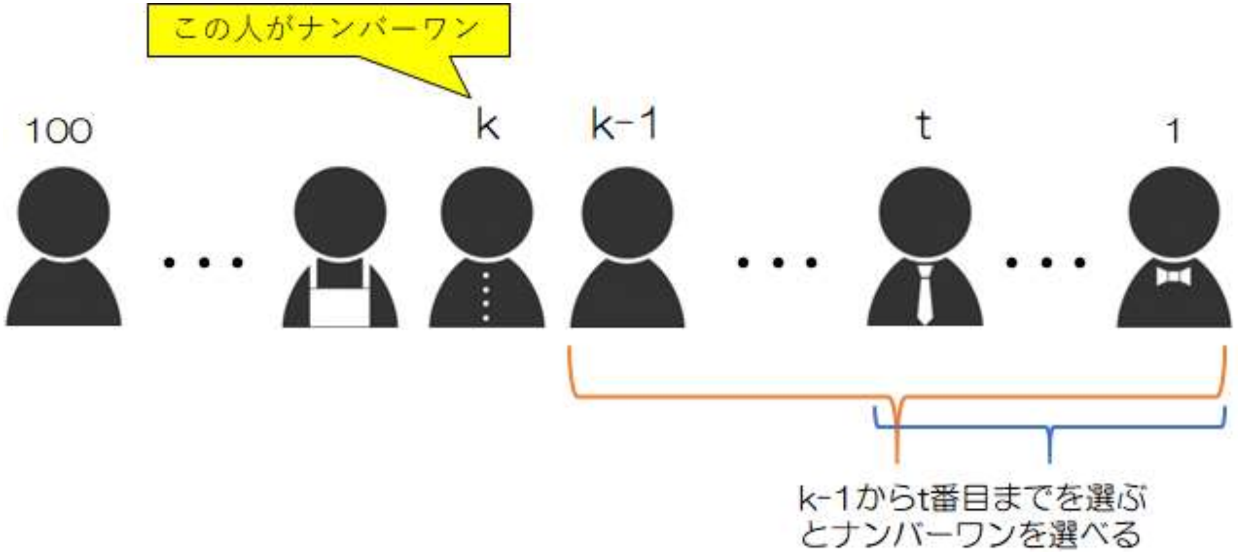
＜一般化＞

ナンバーワンがｋ番目にいて、ｔ番目までを無条件にスルーする場合、ナンバーワンを選ぶための条件はt番目までにｋ－１番目までの最高得点者がいることである

これより、この条件を満たすための確率はｋ－１からｔを選ぶ確率と同じであるので、

$$\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{k-1}}$$

となる



ただし、忘れてはいけないのがナンバーワンが無条件にスルーする t 番目までに含まれている場合($t \geqq k$)です

このときはもちろん選べる確率は０なので、ここまでをまとめると、ナンバーワンを選ぶ確率は

$$\mathbf{t \geqq k} \text{のとき} \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t < k} \text{のとき} \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{k-1}}$$

そして、ナンバーワンがｋ番目にいる確率は$\frac{1}{n}$です

よって、ナンバーワンがｋ番目にいてなおかつナンバーワンを選べる確率は

$$\frac{1}{n}\frac{t}{k-1}$$

となる

ナンバーワンはどこにいるかわからないわけですから、すべての場合について足すと

$$\frac{1}{n}\sum_{k=t+1}^{n}\frac{t}{k-1}$$

となる

ここで、シグマの開始がｋ＝ｔ＋１となっていることに注意である

前のスライドで見たように、ｔ≧ｋでは選べる確率が０だからである

よって、ナンバーワンを選べる確率は

$$\frac{1}{n}\sum_{k=t+1}^{n}\frac{t}{k-1}$$

$$=\frac{t}{n}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right) \quad \ldots \quad ①$$

となる

ここで、この確率を最大とするｔを求めればよいが、

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}$$

の部分はｎが十分に大きいとき

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\sim\log\frac{n}{t} \quad \ldots \quad ※$$

と書ける

なので、式①は次のように書き直すことができる

$$\frac{1}{n}\sum_{k=t+1}^{n}\frac{1}{k-1}$$

$$=\frac{t}{n}\log\frac{n}{t}$$

である

これは、ナンバーワンを選べる確率なので、この右辺を最大とするｔを求める

最大を求めるという行為は、微分したものが０になるということである

したがって、前のスライドの式の右辺をｔで微分して

$$\left(\frac{t}{n}\log\frac{n}{t}\right)' = \frac{1}{n}\log\frac{n}{t} - \frac{1}{n}$$

とし、これが０になるｔを求めると

$$\frac{1}{n}\log\frac{n}{t} - \frac{1}{n} = 0$$

$$\frac{1}{n}\log\frac{n}{t} = \frac{1}{n}$$

$$\log\frac{n}{t} = 1$$

$$\frac{n}{t} = e\text{(ネイピア数)}$$

つまり、ｔ＝$\frac{n}{e}$のときにナンバーワンを選ぶ確率が最大となるのである
具体例では、お見合いする人数ｎは１００人だったので、この式にｎ＝１００を代入し、e＝２．７２として計算すると

$$t = \frac{n}{e}$$
$$= \frac{100}{2.72}$$
$$= 36.765 \simeq 37$$

である

よって、１００人のお見合いする人から最もいい相手を選びたい場合の最良の選択は、３７人目までを無条件にスルーし、そのあと今までの(３７人目まで)の最高記録を上回った人と、結婚する

ということになる

※式の証明

(log x)′

$$= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\log_a(x+\varDelta x) - \log_a x}{\varDelta x}$$

$$= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{1}{\varDelta x} \log_a\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right)$$

h=$\frac{\varDelta x}{x}$とおくと

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

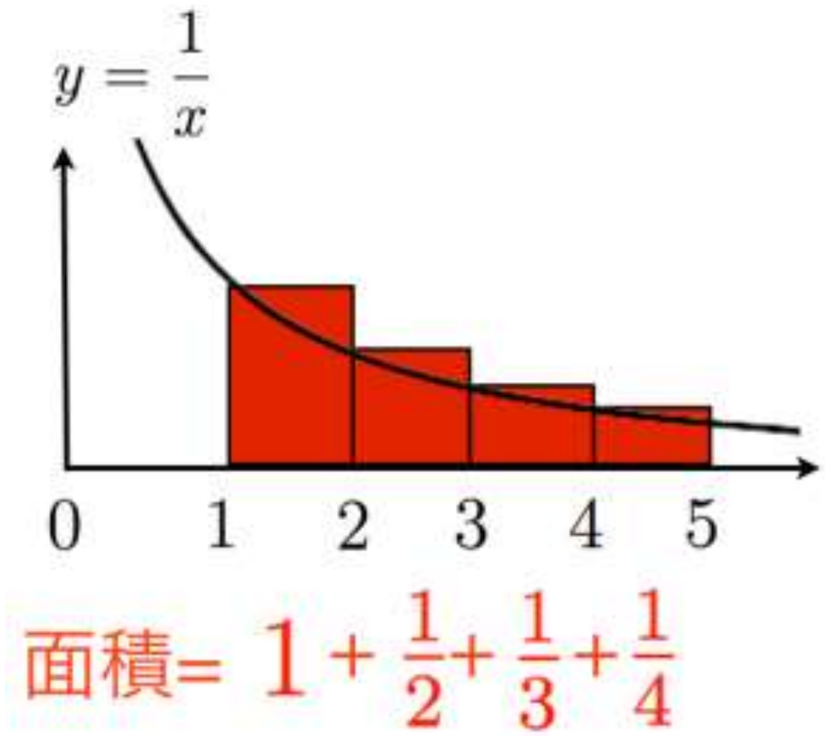
$$= \frac{1}{x} \lim_{a} e = \frac{1}{x \log a}$$

特にa=eのとき　$(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx=[\log_e x]_1^n$$

$$=\log_e n-\log_e 1$$

$$=\log_e n$$



(logx)’=$\frac{1}{x}$が証明されたので、上の式は左のグラフのように表される
Ｘが大きくなっていく程、グラフとの誤差が少なくなるため、値が正確になる
では、Ｘが小さいときはどうだろうか？

お見合いする人数が少ないときは？

お見合いする人数ｎが十分に大きいとはどのような値のことをいうのだろうか？

$$\frac{1}{n}\sum_{k=t+1}^{n}\frac{t}{k-1}$$

$$=\frac{t}{n}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$$

上の式のn,t,kに数を代入して計算すると

表1　nとtとeと確率の関係

お見合いする人数（n）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n/e	0.3679	0.7358	0.7558	1.4716	1.8395	2.2074	2.5753	2.9432	3.3111	3.679
確率が最大になるスルーする人数（t)	0	0	1	1	2	2	2	3	3	3
最大になる確率(%)	100	50	50	45.83	43.33	42.78	41.43	40.98	40.6	39.87
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	4.0469	4.4148	4.7825	5.1506	5.5185	5.8864	6.2543	6.6222	6.9909	7.3583
	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
	39.84	39.55	39.23	39.17	38.94	38.81	38.73	38.54	38.5	38.42

ここで、ナンバーワンを選べる確率

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=t+1}^{n}\frac{1}{k-1}$$

$$=\frac{t}{n}\log\frac{n}{t}$$

この式にｎ＝１００とｔ＝３７そして$\frac{n}{t}=e$を代入して計算するとナンバーワンを選べる確率$=\frac{t}{n}\log\frac{n}{t}$

$$=\frac{37}{100}\log e$$

=37%

となる

なので、お見合いする人数がｎ人の場合無条件にスルーする人数は、無条件にスルーする人数＝$\frac{n}{e}$であり

このとき、ナンバーワンを選べる確率＝$\frac{1}{e}$＝３７％となる

ゆえに、ナンバーワンを選べる確率はお見合いする人数によらず、最低でも37%である

５．研究の結果・考察

・お見合いで最もいい相手を選ぶ方法は $\frac{\text{お見合いする人数}}{e(\text{ネイピア数})}$ を無条件にスルーすることである

・最もいい相手を選べる確率はお見合いする人数によらず最低でも３７％である

６．課題

- ネイピア数についてまだよく理解していないため、もっと深い学習が必要である
- 数学Ⅲを習っていないため、よく理解していない部分があったのでもっと学習が必要である

７．おわりに

　私たちは、数学とは関係のなさそうなお見合いというものの証明をしてみて、とても難しかったけれど新たな発見や気づけたことがあったので良かったと思います。

８．参考文献

・高校数学の美しい物語
(mathtrain.jp/hisyomondai)