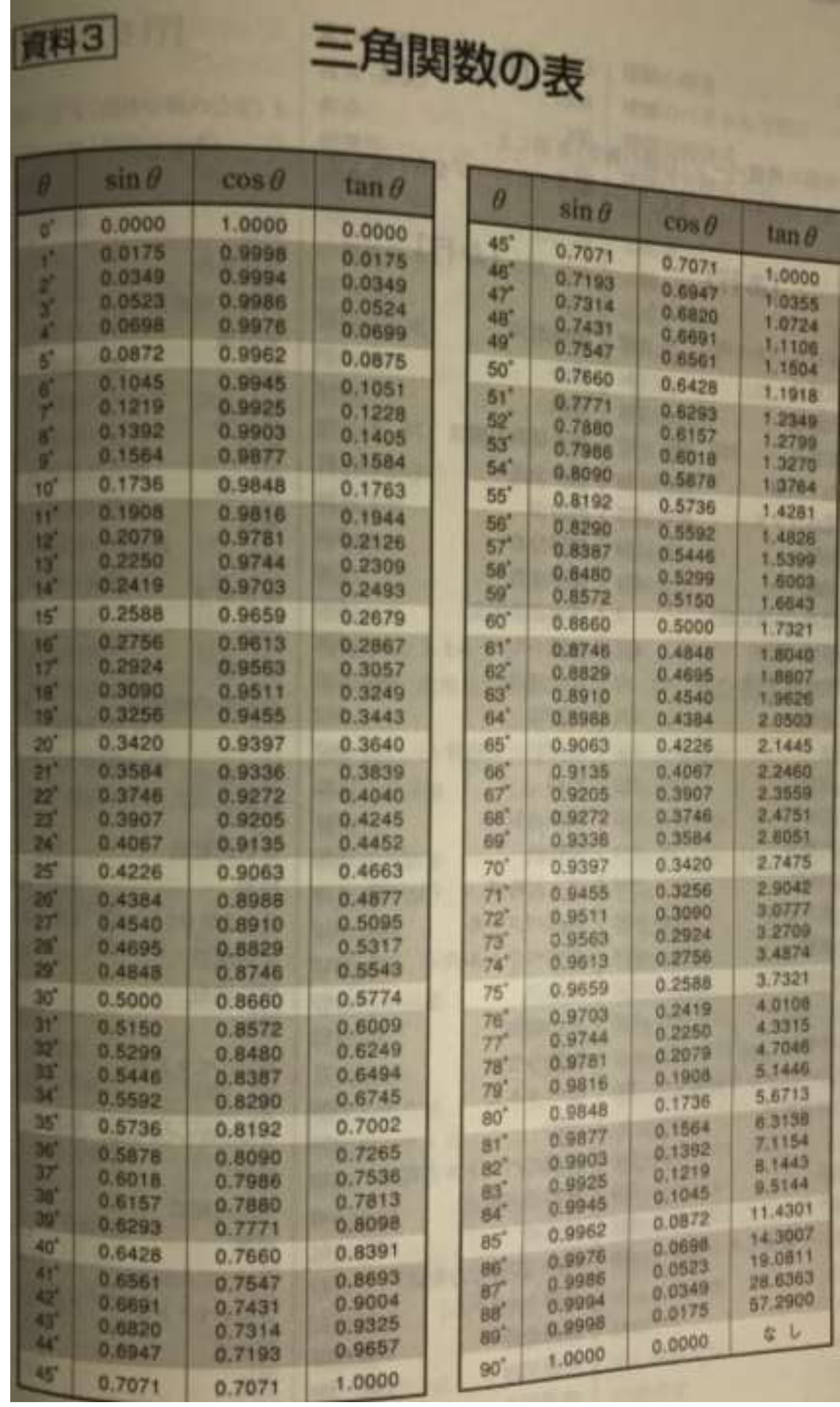
三角比の真の値

目次

1. 初めに

　教科書の後ろのほうに載っている三角比表は近似値なので正確ではない。なぜ教科書は真の値を載せないのか･･･その理由を追求すべく我々は研究にとりかかった･･･


資料3

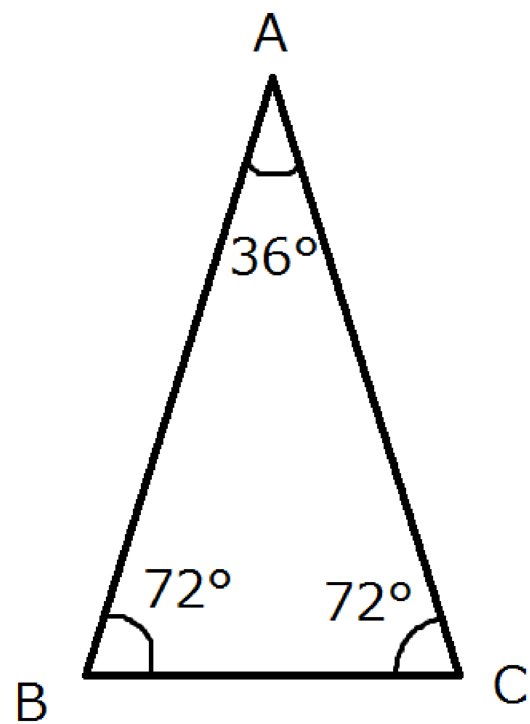
三角関数の表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	なし

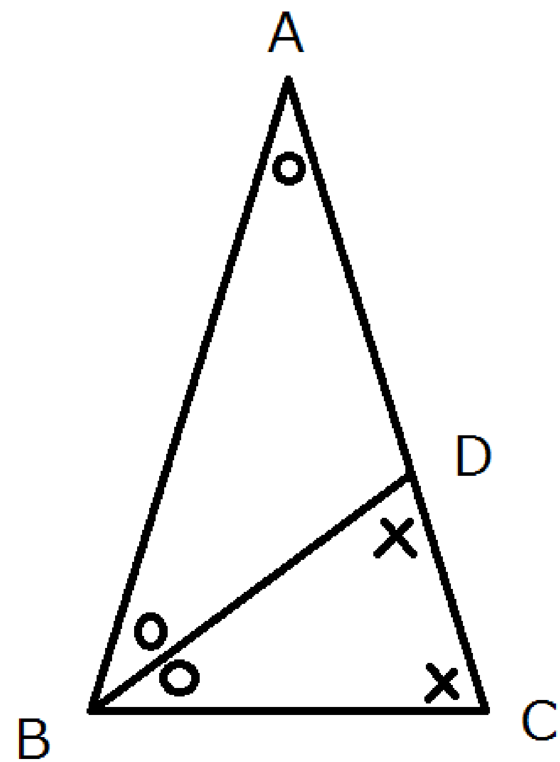
２．$\sin 3°$を求める

下のような二等辺三角形を考える。



２. $\sin 3°$を求める

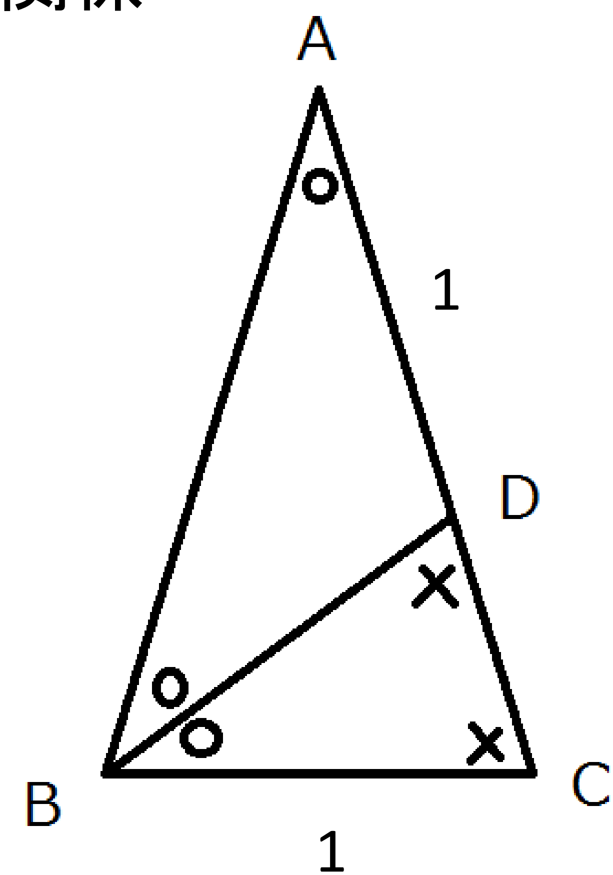
点Bから角の二等分線を引き、交点をDとする。



２. $\sin 3°$を求める

三角形ABCと三角形BCDの相似関係
よりCDを求める。BCを1とすると

$$(1+CD):1=1:CD$$
$$CD^2+CD-1=0$$
$CD>0$より
$$CD=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

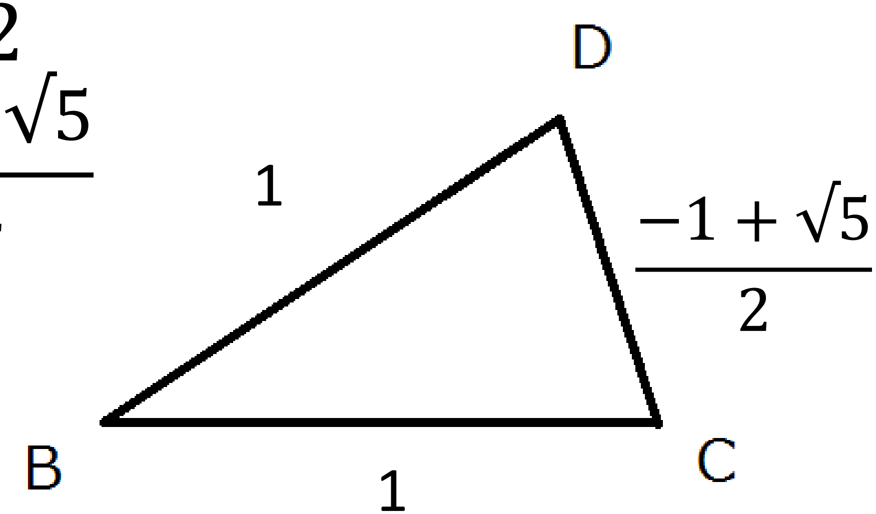


２. $\sin 3°$を求める

余弦定理より$\cos 36°$を求める。

$$\cos 36° = \frac{1^2 + 1^2 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2}$$

$$\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$



２．$\sin 3°$を求める

半角の公式より$\sin 15°$、$\cos 15°$、$\sin 18°$、$\cos 18°$を求める。

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

２．$\sin 3°$を求める

半角の公式より$\sin 15°$、$\cos 15°$、$\sin 18°$、$\cos 18°$を求める。

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\cos 18° = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

2. $\sin 3°$を求める

加法定理より

$$\sin 3° = \sin 18° \cos 15° - \cos 18° \sin 15°$$

$$\sin 3° = \frac{\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{15 + 3\sqrt{5}} + 2\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{16}$$

同様に

$$cos\ 3° = \cos 18° \cos 15° + \sin 18° \sin 15°$$

$$\cos 3° = \frac{\sqrt{30} - \sqrt{10} - \sqrt{6} + \sqrt{2} + 2\sqrt{15 + 3\sqrt{5}} + 2\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{16}$$

３．$\sin 1°$を求める

３倍角の公式を変形した三次方程式を考える。

$sin1° = x, sin3° = a$　と置くと

$$sin3° = 3sin1° - 4sin^3 1°$$

$$4x^3 - 3x + a = 0$$

これの3つの解が$sin1°, sin121°, sin241°$の値である。

３．$\sin 1°$を求める

ここで、$x = s + t$と置く。

$$4x^3 - 3x + a = 0$$

$$4(s + t)^3 - 3(s + t) + a = 0$$

展開して整理すると

$$4s^3 + 4t^3 + a + 12st(s + t) - 3(s + t) = 0$$

$$4s^3 + 4t^3 + a + 3(s + t)(4st - 1) = 0$$

３．$\sin 1°$を求める

$$\begin{cases} 4s^3 + 4t^3 + a = 0 \\ \quad 4st - 1 = 0 \end{cases}$$

これを満たす s, tを考える。

$$s = \frac{1}{4}t$$

$$\frac{1}{16t^3} + 4t^3 + a = 0$$

$$64t^6 + 16at^3 + 1 = 0$$

３．$\sin 1°$を求める

$t^3 = T$と置く。

$$64t^6 + 16at^3 + 1 = 0$$
$$64\mathrm{T}^2 + 16a\mathrm{T} + 1 = 0$$

解の公式に代入する。

$$T = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 1}}{8}$$
$$t^3 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 1}}{8}$$

３．$\sin 1°$を求める

$t^3 = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-1}}{8}$のとき、$4s^3+4t^3+a=0$から

$$s^3 = \frac{-a-\sqrt{a^2-1}}{8}$$

よって$t^3 = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-1}}{8}$のとき$s^3 = \frac{-a\mp\sqrt{a^2-1}}{8}$である。

３．$\sin 1°$を求める

$$x = s + t$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{8}} + \sqrt[3]{\frac{-a-\sqrt{a^2-1}}{8}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{-a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[3]{-a - \sqrt{a^2 - 1}}}{2}$$

３. sin 1°を求める

$a = sin3°$を代入する

$$\frac{\sqrt[3]{-sin3° + \sqrt{sin^2 3° - 1}} + \sqrt[3]{-sin3° - \sqrt{sin^2 3° - 1}}}{2}$$

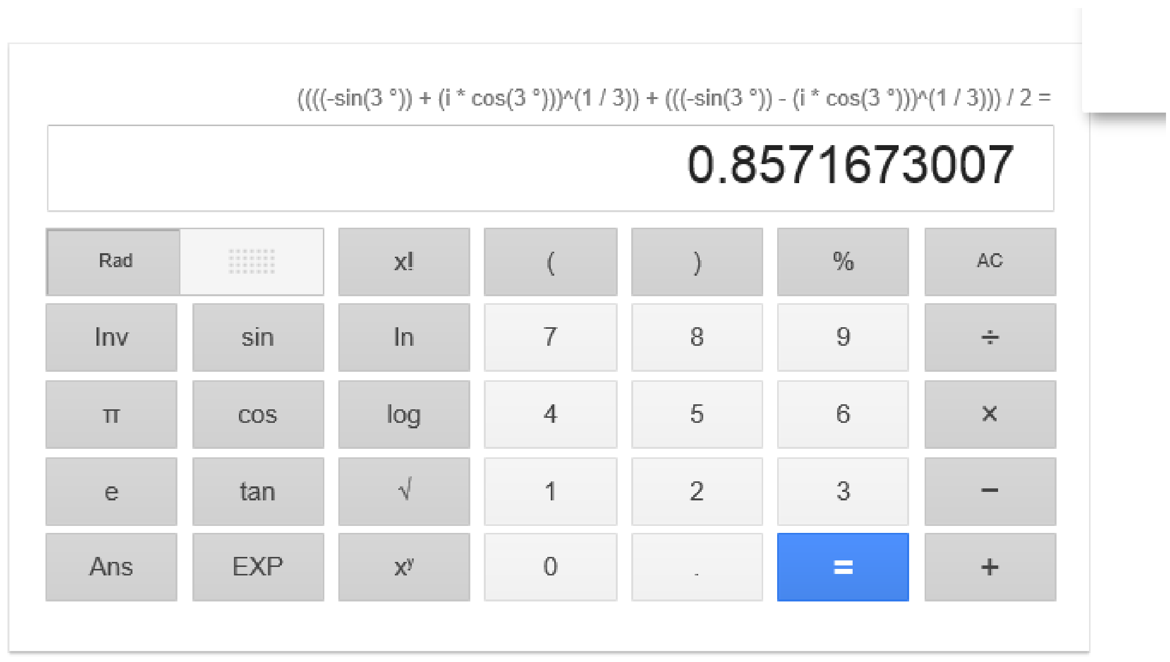
$$= \frac{\sqrt[3]{-sin3° + i\sqrt{1 - sin^2 3°}} + \sqrt[3]{-sin3° - i\sqrt{1 - sin^2 3°}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{-sin3° + icos3°} + \sqrt[3]{-sin3° - icos3°}}{2}$$

4. しかし

$$\frac{\sqrt[3]{-sin3° + icos3°} + \sqrt[3]{-sin3° - icos3°}}{2}$$

これはsin 121°
の値である。



５. そして

$$\begin{cases} 4s^3 + 4t^3 + a = 0 \\ 4st - 1 = 0 \end{cases}$$

この方程式を満たすs、tを一通りしか考えなかったがじつは全部で三つ存在する

5. そして

$t^3 = \frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{8}$より、$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$とすると、

$$t = \sqrt[3]{\frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{8}}$$

$$, \omega\sqrt[3]{\frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{8}}$$

$$,\omega^2\sqrt[3]{\frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{8}}$$

5. そして

$4st-1=0$から

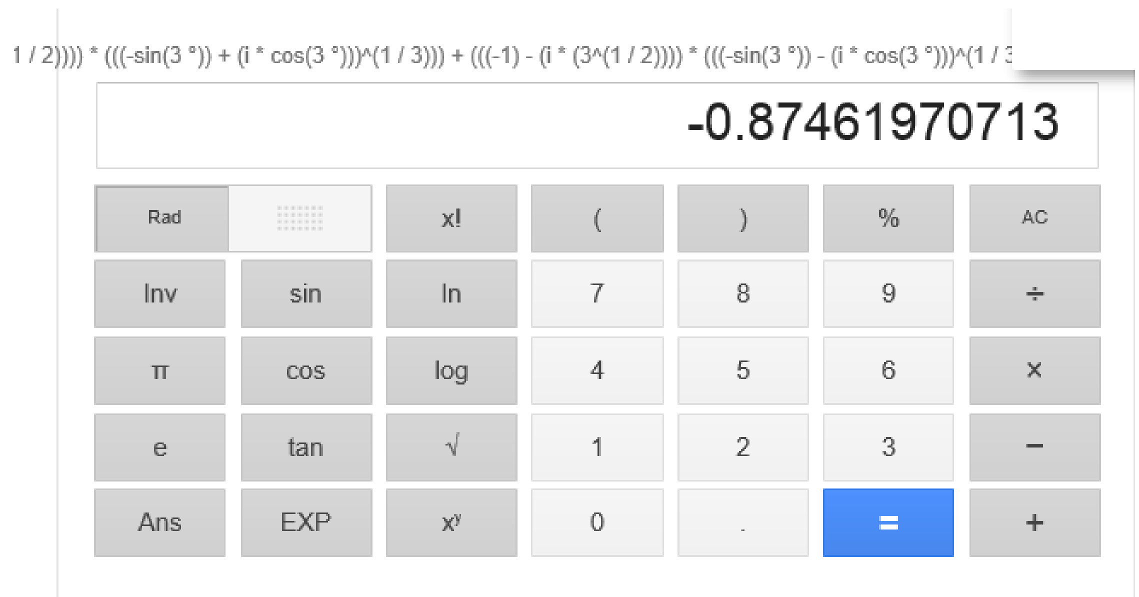
$t=\omega\sqrt[3]{\frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{8}}$のとき、$s=\omega^2\sqrt[3]{\frac{-a-\sqrt{a^2-1}}{8}}$

$t=\omega^2\sqrt[3]{\frac{-a+\sqrt{a^2-1}}{8}}$のとき、$s=\omega\sqrt[3]{\frac{-a-\sqrt{a^2-1}}{8}}$

6. しかし2

$$\frac{\omega\sqrt[3]{-sin3° + icos3°} + \omega^2\sqrt[3]{-sin3° - icos3°}}{2}$$

これは$\sin 241°$
の値である。



7. ついに

$$\frac{\omega^2\sqrt[3]{-sin3° + icos3°} + \omega\sqrt[3]{-sin3° - icos3°}}{2}$$

これは$\sin 1°$
の値である。

８．真の値

$\sin 1° =$

$$\frac{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\left(\frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}\right)+i\left(\frac{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}\right)}}{2}$$

$$+\frac{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\left(\frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}\right)-i\left(\frac{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}\right)}}{2}$$

９．結論

載せられません。

１０．反省

- 取り掛かるのが遅かった。
- $\sin 1°$しか求められなかった。