じゃんけんは何人以上から
２つに分けたほうが早く終わるか

調べようと思ったきっかけ

じゃんけんは人数が多くなるほど、決着がつくまでの回数が多くなる。
しかし、人をグループ分けして行うことで早く終わることがある。
では、早く終わらせるには何人以上から人を分けたほうが良いのか？
ということが気になったため。

研究目的

じゃんけんを分ける時と分けない時の回数の期待値を調べ、
分けた時が早く終わる場合を調べる。

【例】さいころの出る目の期待値は

$$1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

じゃんけんとは

- じゃんけん（漢字表記：石拳、両拳、雀拳）は、手だけを使う遊戯である。3種類の指の出し方（グー・チョキ・パー）で三すくみを構成し、勝敗を決める手段である。- じゃんけん – Wikipedia
- https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%81%98%E3%82%83%E3%82%93%E3%81%91%E3%82%93

最も簡単な、２人のときを調べる。

- 以下n人のときの、終了までの回数の期待値をE(n)とする。
- (*は×と同義)

どちらかが勝つ確率は$\frac{2}{3}$ あいこになる確率が$\frac{1}{3}$

$$E(2)=\boxed{1*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{0}}+\boxed{2*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{1}}+\boxed{3*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{2}}+\boxed{4*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{3}}+\cdots \quad \cdots①$$

あいこ1回 勝ち1回(計2回)　あいこ2回 勝ち1回(計3回)　あいこ3回 勝ち1回(計4回)

① を$\frac{1}{3}$倍する

$$\frac{1}{3}E(2)=1*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+2*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{2}+3*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+4*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{4}+\cdots \quad \cdots②$$

①―②より

$$\frac{2}{3}E(2)=1*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{0}+1*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+1*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{2}+1*\frac{2}{3}*\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\cdots$$

両辺を$\frac{3}{2}$倍する

$$E(2)=1*\left(\frac{1}{3}\right)^{0}+1*\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+1*\left(\frac{1}{3}\right)^{2}+1*\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\cdots$$

初項 1, 公比$\frac{1}{3}$の無限等比級数より和は

$$E(2)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

よって、２人のときの続く回数の期待値は $\frac{3}{2}$

３人のときを調べる。

２人のときと同様に調べると、時間がかかってしまう…
そこで、違う形をとる。

１人が勝つ確率は$\frac{1}{3}$ ２人が勝つ確率が$\frac{1}{3}$ あいこになる確率が$\frac{1}{3}$

期待値を出す

$$\mathrm{E}(3) = \boxed{\frac{1}{3}(E(3)+1)} + \boxed{\frac{1}{3}(E(2)+1)} + \boxed{\frac{1}{3}} \times 1$$

あいこのとき
1回加算したE(3)と
同じ

2人勝ちのとき
1回加算したE(2)と
同じ

1人勝ちのとき

$\mathrm{E}(2) = \frac{3}{2}$を代入し、方程式を解く

$\mathrm{E}(3) = \frac{9}{4}$ より、3人のときの期待値は$\frac{9}{4}$

E(n)の一般化をする

n人のときn人での期待値をE(n)とする

各々の場合の確率

- **1人勝ちのとき**

$$\frac{3 \times_n C_1}{3^n}$$

- **2人勝ちのとき**

$$\frac{3 \times_n C_2}{3^n}$$

- **3人勝ちのとき**

$$\frac{3 \times_n C_3}{3^n}$$

·

·

·

- **(n-1)人勝ち**

$$\frac{3 \times_n C_{n-1}}{3^n}$$

- **あいこ**

$$\frac{3^n - 3(2^n - 2)}{3^n}$$

一般化

$$\mathrm{E}(n)=\frac{3^n-3(2^n-2)}{3^n}(E(n)+1)+\frac{3\times_n C_{n-1}}{3^n}(\mathrm{E}(\mathrm{n}-1)+1)$$
$$+\frac{3\times_n C_{n-2}}{3^n}(E(n-2)+1)$$

$$+\cdots+\frac{3\times_n C_2}{3^n}(E(2)+1)+\frac{3\times_n C_1}{3^n}(E(1)+1)$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{n})$$
$$=\frac{{}_nC_{n-1}\times E(n-1)+{}_nC_{n-2}\times E(n-2)+\cdots+{}_nC_2\times E(2)+{}_nC_1\times E(1)+3^{n-1}}{2^2-2}$$

$$=\frac{\sum_{k=2}^{n-1}({}_nC_k\times E(k))+3^{n-1}}{2^n-2}$$

E(n)のときの期待値

人数(人)	**E(n)のときの期待値**
2	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{9}{4}$
4	$\frac{45}{14}$
5	$\frac{157}{35}$
6	$\frac{13497}{2170}$
…	…

４人を、２人と2人に分けたとき(1)

E(n)のときと同じように、２人と2人に分けた時を考える。
２人と2人のときの期待値E(2,2)と、
その後の２人の期待値E(2)に分けて考える。

２組とも、あいこである確率$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
１組はどちらかが勝ち、１組はあいこである確率$\frac{1}{3} * \frac{2}{3} * 2 = \frac{4}{9}$
２組とも、どちらかが勝つ確率$\frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

４人を、２人と２人に分けたとき(2)

$$\mathrm{E}(2,2) = \frac{1}{9}(E(2,2) + 1) + \frac{2}{9} \times 2(E(2) + 1) + \frac{4}{9} \times 1$$

$$\mathrm{E}(2,2) = \frac{15}{8}$$

よって全体の期待値は

$$\frac{15}{8} + \frac{3}{2} = \frac{27}{8} = 3.375$$

６人を、３人と３人に分けたとき(1)

先ほどと同じように考えるが、E(3,3)を求めるにはE(2,3)が必要。

E(2,3)を求める
２人の組をA,３人の組をBとする

- ２組とも、あいこである確率$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
- Aはあいこで、Bは２人勝つ確率$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
- Aはどちらかが勝って、Bは2人勝つ
  もしくは、Aはあいこで、Bは１人勝ちする確率$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{3}{9}$
- Aはどちらかが勝って、Bはあいこの確率$\frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
- ２組とも、どちらかが勝つ確率$\frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

６人を、３人と３人に分けたとき(2)

$$\mathrm{E}(2,3) = \frac{1}{9}(E(2,3) + 1) + \frac{1}{9}(E(2,2) + 1) + \frac{3}{9}(E(2) + 1)$$
$$+ \frac{2}{9}(E(3) + 1) + \frac{2}{9}$$
$$\mathrm{E}(2,3) = \frac{159}{64}$$

６人を、３人と３人に分けたとき(3)

E(3,3)を求める

- ２組とも、あいこである確率$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
- 片方はあいこで、もう片方は２人勝つ確率$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} * 2 = \frac{2}{9}$
- 片方はどちらかが勝って、もう片方はあいこの確率$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} * 2 = \frac{2}{9}$
- 両方とも2人勝ちの確率$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
- 片方は1人勝ちで、もう片方は2人勝ちの確率$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} * 2 = \frac{2}{9}$
- 両方とも1人勝ちする確率$\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

６人を、３人と３人に分けたとき(4)

$$\mathrm{E}(3,3)=\frac{1}{9}(E(3,3)+1)+\frac{2}{9}(E(2,3)+1)+\frac{2}{9}(E(3)+1)+\frac{1}{9}(E(2,2)+1)$$

$$+\frac{2}{9}(E(2)+1)+\frac{1}{9}$$

$$\mathrm{E}(3,3)=\frac{747}{256}$$

よって全体の期待値は

$$\frac{747}{256}+\frac{3}{2}=\frac{1131}{256}=4.4179\ldots$$

おまけ：６人を、２人と2人と2人に分けたとき(1)

E(2,2,2)を求める

３組があいこの確率$\frac{1}{3}*\frac{1}{3}*\frac{1}{3}$

１組が勝って、残りがあいこの確率$\frac{1}{3}*\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*3$

２組が勝って、残りがあいこの確率$\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{2}{3}*3$

３組とも勝つ確率$\frac{2}{3}*\frac{2}{3}*\frac{2}{3}$

おまけ：６人を、２人と2人と2人に分けたとき(2)

$$\mathrm{E}(2,2,2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times (E(2,2,2) + 1) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times 3(E(2,2) + 1)$$
$$+ \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3(E(2) + 1) + \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$\mathrm{E}(2,2,2) = \frac{225}{104}$$

よって全体の期待値は
$$\frac{225}{104} + \frac{9}{4} = \frac{225 + 235}{104} = \frac{459}{104} = 4.4134 \ldots$$

結果：表

人数	分けないとき	分けるとき			
2人	$\frac{3}{2}$=1.5				
3人	$\frac{9}{4}$=2.25	1-2,$\mathbf{3}$			
4人	$\frac{45}{14}$=3.214…	1-3,$\frac{15}{4}$=3.75	2-2,$\frac{27}{8}$=3.375		
5人	$\frac{157}{35}$=4.485…	1-4, $\frac{33}{7}$=4.714…	2-3,$\frac{255}{64}$=3.984…		1-2-2,$\frac{33}{8}$=4.125
6人	$\frac{13497}{2170}$=6.219…			3-3,$\frac{1131}{256}$=4.417…	2-2-2,$\frac{459}{104}$=4.413…

まとめ

公平性を考えないで人を２つに分ける場合は、
５人から２人と３人に分けたほうがよい。
公平性を考えて人を２つ分ける場合は、
６人から３人と３人に分けたほうがよいが、
６人の場合は２人と２人と２人に分けたほうが、
わずかながら早く終わると思われる。