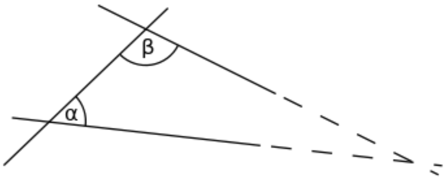
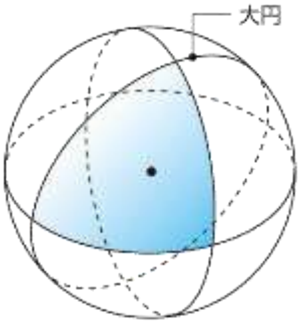
4 球面幾何学

幾何学と言えばいわゆる普通の「平面幾何学」のことで、これは「ユークリッドの 5 つの公準」という、幾何学をやるにあたって無条件に認めるべき公理によって構成されている。5 つのうち 4 つはすごくシンプルだが（点があるとか直線が引けるとか）、5 つ目の「平行線の公準」だけが内容が長く、それは 「1 つの線分が 2 つの直線に交わり、同じ側の内角の和が $180°$ より小さいならば、この 2 つの直線は限りなく延長されると内角の和が $180°$ より小さい側で交わる」というもの（右図）。この公理がもしなかったらと考えることで平面幾何以外の様々な幾何学が生まれる。

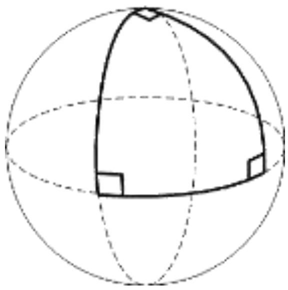


球面幾何学とは名前の通り球面上で図形を考える幾何学で、まず球面幾何学における「線分」の概念を考える。平面上では「2 点をつなぐ最短距離を結んで、それを延長したもの」という定義であったから、球面幾何でも同じようにすると、球面幾何での直線とは「2 点を通る大円（球をちょうど半分にできる円）」のことである。想像しにくい場合には地球の赤道を考えるとよい。勘違いしやすいが、地球で北緯 $60°$ の 2 地点 A，B があるとき，直線 AB は北緯 $60°$ をなぞるような線にはならないことに注意しよう。それは最短距離ではない。以上より球面上に 2 つの異なる大円があるときは、それらは必ず 2 点で交わることになるので、球面幾何学では平行線という概念自体が無いことになる。

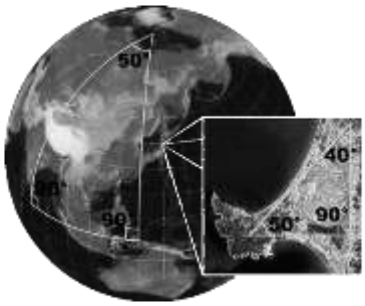


平面幾何学での基本的な定理である三平方の定理を、球面幾何学上で考えるために、球面幾何学における三角形を考える。当然 3 つの大円によって囲まれる右図のような図形になるだろう。三平方の定理は直角三角形の辺の長さにかかわる定理であるので、球面幾何学での直角三角形を考えるが、実はこれにはいくつかのタイプがある。

まず始めは「直角正三角形」である。3 つの内角が全て直角でしかも 3 辺の長さが等しい三角形で、平面ではありえないことが球面では起こる。北極点と、赤道上から東経 $0°$ と東経 $90°$ の 2 点を用意するとつくることができる。直角正三角形は球に対してこのサイズのものだけで、大円の長さが a のとき 1 辺の長さは大円の長さのちょうど $\dfrac{1}{4}a$ になる。



次は「二直角三角形」を考える。先ほどの直角正三角形と比べると、赤道上からどの 2 点をとってもよい、という点が違う。つまり赤道の長さはどのくらいでもよい。この三角形は両側の辺の長さが等しく $\dfrac{1}{4}a$ である。2 つの直角の間にある辺の長さは上の角度によって変化する。上の角度が $x°$ ならば，辺の長さは $\dfrac{x}{360}\cdot a$ になる。



他にも「一直角二等辺三角形」や一般の「一直角三角形」についても調べたがよく分からなかった。三角形の面積についてもわからなかった。球面幾何学以外の非ユークリッド幾何についても調べてみたい。

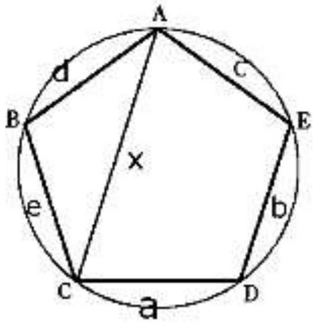
$\boxed{5}$ ヘロンの公式の一般化

三角形の３辺の長さa，b，cから面積Sを表す公式として、以下の公式が有名である。

（ヘロンの公式） $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　ただし　$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

同様に、四角形の面積についても公式が無いか調べたところ、円に内接する四角形限定で以下の公式を見つけることができた。

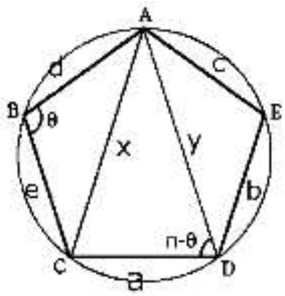
（ブラーマグプタの公式） $S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$　ただし　$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$



これと同様にして五角形以上でも円に内接していれば５辺の長さa，b，c，d，eを用いて面積を表せるのではないかと考えた。５辺と１つの内角の大きさが分かっていれば，余弦定理とブラーマグプタを組み合わせることで以下のように表せる。

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}de\sin B$，余弦定理より$X=\sqrt{d^2+e^2-2de\cos B}$で

$s=\dfrac{a+b+c+X}{2}$　として　$\mathrm{ACDE}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-X)}$



内角の大きさを用いずに面積を表すには、５辺の長さから対角線の長さXが表わせればよいことになる。そこで、右図の四角形ABCDで余弦定理を２回用いて

$X^2=d^2+e^2-2de\cos\theta=a^2+Y^2+2aY\cos\theta$　より　$\cos\theta$を消去して

$X^2=\dfrac{(d^2+e^2)aY+(a^2+Y^2)de}{de+aY}$…①。四角形ACDEでも同様にして

$Y^2=\dfrac{(X^2+a^2)bc+(b^2+c^2)aX}{aX+bc}$…②をつくり，①，②から$Y$を消去すると

７次方程式$abcX^7+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-d^2e^2)X^6+abc\{(a^2+b^2+c^2-2(d^2+e^2)\}X^5$

$$+\{a^2b^2c^2+2d^2e^2(a^2+b^2+c^2)-2(d^2+e^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}X^4$$

$$+abc\{(d^2+e^2)^2+4d^2e^2-2(d^2+e^2)(a^2+b^2+c^2)\}X^3$$

$$+\{(d^2+e^2)^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2a^2b^2c^2(d^2+e^2)-d^2e^2(a^2+b^2+c^2)^2\}X^2$$

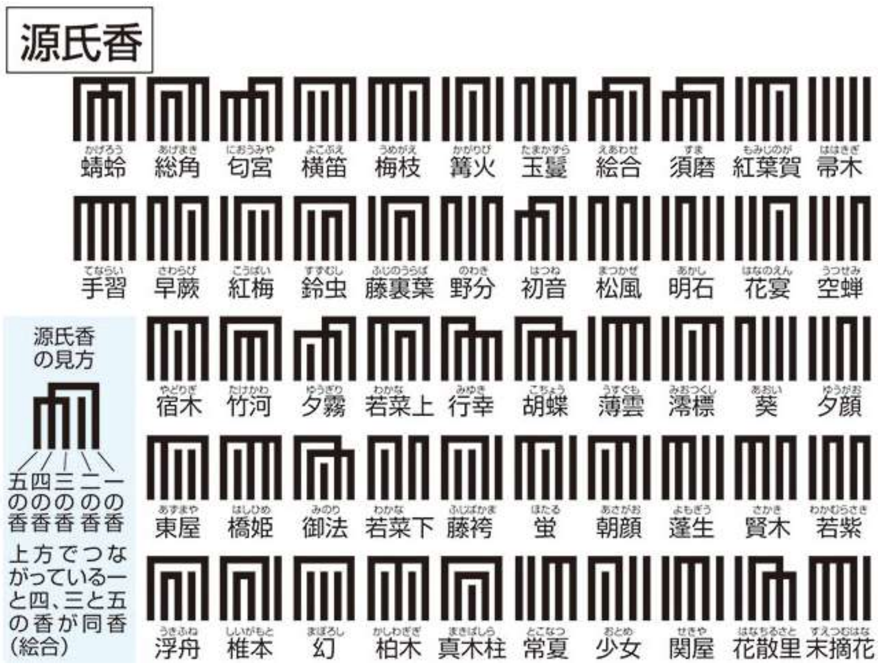
$$+abc(a^2+b^2+c^2)(d^2-e^2)^2X+a^2b^2c^2(d^2-e^2)^2=0$$

を得る。よく見ると１次の項と定数項に$(d^2-e^2)^2$があるので，以降は$d=e$の三角形に限定して考える。このとき後ろの２つの項は0になって消え、全体をX^2でくくることができるが$X=0$は必要な解ではないので割ってしまい、のこりの５次方程式の解を表せばよいことになる。

しかし一般に５次方程式は解の公式を持たない。ためしに$a=2$，$b=3$，$c=4$，$d=e=1$の円に内接する５角形で５次方程式を考えると、ガロア理論の定理によって冪根（有限回の四則演算と根号計算で表せる解）を持たないことが分かる。$d=e$に限定したこの５角形について面積を表すことができないので、一般には５角形の面積の公式はない、ということである。面積が求められる５角形が無いわけではないが、ヘロンのように万能の公式はない。

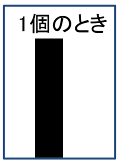
6 源氏香

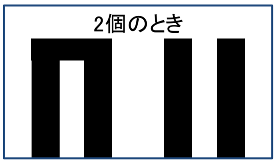
源氏香とは、江戸時代の享保ころに成立した、5 つの香木の香りをかぎ分ける一種のゲームである。5 つの香木のうち、何番目と何番目が同じ香だったかを考え、その答えを右図のように源氏物語の該当の巻名を用いて答える。例えば、一の香と四の香が同じ香、三の香と五の香が同じ香、二の香は単独の香の時には、答えは「絵合（えあわせ)」となる。源氏物語は全 54 帖の話だが、始まりの「桐壺」と終わりの「夢浮橋」以外の 52 帖が答えと対応している。

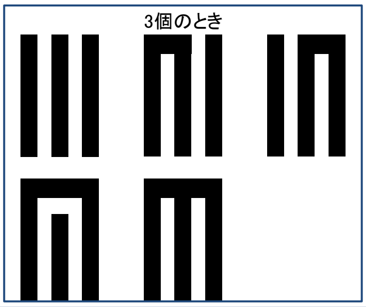


香の個数が 5 個でなかったとき、そのパターンが何通りになるのかを調べたい。

まず香の種類が 1 個の時は 1 通り、2 個のときは 2 通りである。源氏香にならって答に対応する図をつくると右の通り。







香が 3 個のときは次のように場合分けする。

①香の種類が 3 種類のとき

全部違う香なので 1 通り

②香の種類が 2 種類のとき

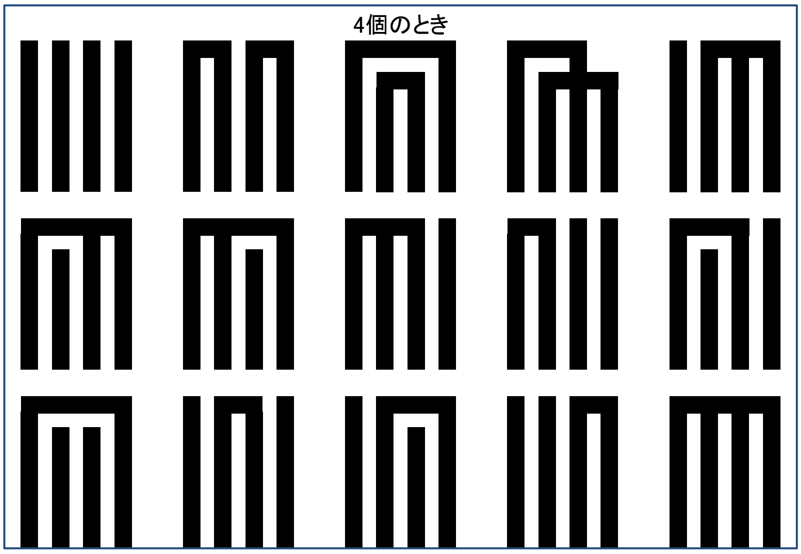
3 つの香のうちどの 2 個が同じ香か、で ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り

③香の種類が 1 種類のとき

全部同じ香なので 1 通り

①～③より全部で 5 通り

右に答に対応する図を示す。



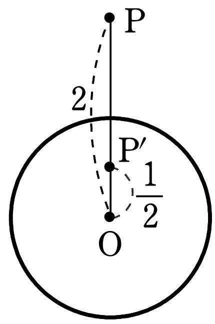
香が 4 個のときも同様にして計算すると全部で 15 通り。香の個数が n 個のときの答が何通りになるのか、n の式で表したかったが難しくてできなかった。

$\boxed{7}$ 反転幾何学の序

平面上の点を別の点に移す変換として代表的なものとして、線対称移動と点対称移動がある。これ以外にも、円を使った「反転」という変換があるので、これについて調べてみる。

（反転の定義）中心O，半径 r の円を考え、これを反転円 C と呼ぶ。平面上の点Pがあるとき、半直線OP上にあって $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}'=r^2$ となる点 P' を円 C に関するPの反転という。ただし中心Oについては満たす点がないので、Oの反転は仮想の点（無限遠点 ω）に移るものとする。逆に無限遠点 ω は反転でOに移る。

例えば右の図で、円の半径が1の反転円を考えると、$\mathrm{OP}=2$ なので、Pの反転は $\mathrm{OP}'=\dfrac{1}{2}$ となる点 P' である。つまり反転によってPは P' に移る。



反転の定義を考えれば、「円の外側の点は円の内側に移り、円の内側の点は円の外側に移る。反転円の円周上の点は、反転によって動かない（自分自身に移る)」ということが分かる。他にも反転の基本性質として以下のようなことが分かる。

（反転の基本性質）

①「原点を通らない直線」は反転によって「原点を通る円」に移る。

②「原点を通る直線」は反転によって「原点を通る直線」に移る。

③「原点を通らない円」は反転によって「原点を通らない円」に移る。

④「原点を通る円」は反転によって「原点を通らない直線」に移る。

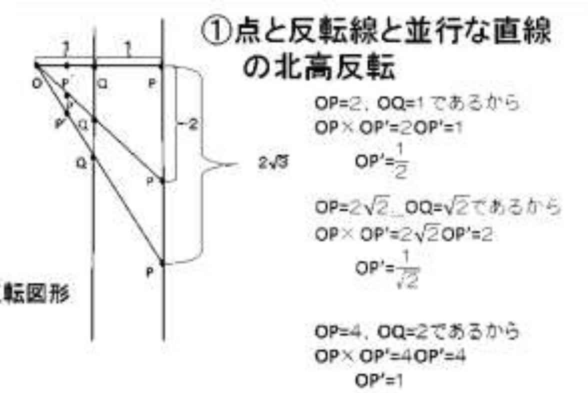
⑤ 2つの図形を同時に反転するとき、接する図形は反転しても接している。接していない図形は反転しても接していない。

⑥「反転円と直交する円」は反転によって動かない（自分自身に移る）

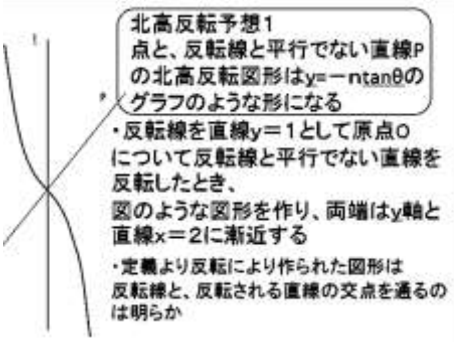
反転の基本的な性質が分かったところで、自分たちで反転に似た変換である「北高反転」をつくって、それによって基本的な図形がどのような図形に移るのかを調べることにする。

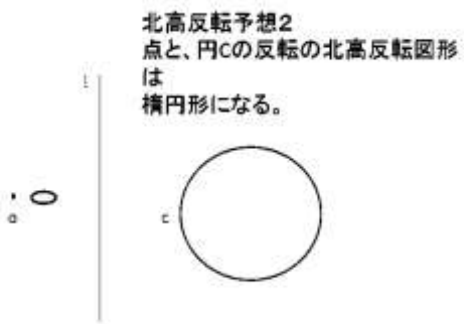
（北高反転の定義）基準点Oと、Oからの距離が r であるような直線（反転線）ℓ を考える。平面上の点Pがあるとき直線OPと ℓ の交点をQとおく。このときPの反転は $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OP}'=\mathrm{OQ}^2$ となる点 OP' に移る。

反転線と平行な直線は北高反転によって、やはり反転線と平行な直線に移るようである。右図にそれを示す。



反転線と平行でない直線や円の北高反転もどうなるか調べてみたが、厳密な証明はできなかった。以下のようになるのでは、と予想した。





$\boxed{8}$　席替えによって座席が変わらない人数の期待値

クラスで席替えをすると、「席替えしたのに席が変わらなかった」という人がよくいる。席替えをすると座席が変わらない人数は平均で何人いるのか、期待値を計算しようと思った。

期待値とは、ある試行を行ったときその結果として得られる数値の平均値のこと。試行によって得られる数値が x_1, x_2, $\cdots x_n$, それぞれの値をとる確率が p_1, p_2, $\cdots p_n$ であるとき、この試行によって得られる数値の期待値は $x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$ で計算できる。

① 2 人のクラスで席替えをしたとき

席の決め方は全部で $2! = 2$ 通り。座席が変わらない人数が 0 人になるのは 1 通りだから確率は $\dfrac{1}{2}$, 座席が変わらない人数が 1 人になるのは 0 通りだから確率も 0 , 座席が変わらない人数が 2 人になるのは 1 通りだから $\dfrac{1}{2}$。以上より座席が変わらない人数の期待値は　$0 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$ 人。

② 3 人のクラスで席替えをしたとき

席の決め方は全部で $3! = 6$ 通り。座席が変わらない人数が 0 人になるのは 2 通り、1 人になるのは 3 通り、2 人になるのは 0 通り、3 人になるのは 1 通り。したがって座席が変わらない人数の期待値は

$0 \cdot \dfrac{2}{6} + 1 \cdot \dfrac{3}{6} + 2 \cdot \dfrac{0}{6} + 3 \cdot \dfrac{1}{6} = 1$ 人。

以下同様にして 4 人のクラスで席替えをしたとき、5 人のクラスで席替えをしたときも、座席が変わらない人数の期待値は 1 人であった。そこで、n 人のクラスで席替えをした時に座席が変わらない人数の期待値は 1 人であると予想した。

n 人のときの期待値を n の式で表すために、次のようなことを考えた。

・n 人で全員の座席が変わる座り方の場合の数を a_n で表す。

・n 人で座席が変わらない人数が 1 人の座り方は

①誰が変わらないかが ${}_n\mathrm{C}_1$ 通り　②残りの $n-1$ 人は全員席が変わるのでその座り方は a_{n-1} 通り

だから　${}_n\mathrm{C}_1 \times a_{n-1}$　で表せる。

・n 人で座席が変わらない人数が 2 人の座り方は

①誰が変わらないかが ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り　②残りの $n-2$ 人は全員席が変わるのでその座り方は a_{n-2} 通り

だから　${}_n\mathrm{C}_2 \times a_{n-2}$　で表せる。

・以下同様にして、n 人で座席が変わらない人数が k 人になる座り方は　${}_n\mathrm{C}_k \times a_{n-k}$　通り

以上のことから、求める期待値は次のような式になる。

$$0 \cdot \frac{a_n}{n!} + 1 \cdot \frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times a_{n-1}}{n!} + 2 \cdot \frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times a_{n-2}}{n!} + \cdots + n \cdot \frac{1}{n!}$$

a_n を n の式で表すことができれば、目的の期待値の式に代入して計算できそうだが、そこまでは分からなかった。

9 ポーカーの確率

ポーカーをやっているときに、ある条件の手札から、どのカードを何枚捨てることが最善手なのかを調べようと思った。ここでは役の上がりやすさだけではなく、できる役の強さも考慮するために、ポーカーのそれぞれの役に右のような「強さ」を決めた。この数字を確率変数として用いる。 何度も確率計算を繰り返すことで以下のような結果を得た。①初手スリーカードのときは、フルハウス狙いの 1 枚捨てが最善。②初手ツーペアのときは、そろっていない 1 枚捨てが最善。③初手フラッシュリーチのときは、フラッシュ狙いの 1 枚捨てが最善。④初手片側欠けストレートリーチのときは、並んでいる 3 枚を残して 2 枚捨てが最善。⑤初手ワンペアを含むストレートリーチのときは、ストレートを狙わずワンペア残しの 3 枚捨てが最善。⑥初手ワンペアのみのときは、ワンペア残しの 3 枚捨てが最善。⑦初手ノーカードのときは、任意の 1 枚を残して 4 枚捨てが最善。

役名	配当倍率	掛け金１０００円とした時の金額
ノーカード		０円
ワンペア	１倍	１０００円
ツーペア	２倍	２０００円
スリーカード	３倍	３０００円
ストレート	４倍	４０００円
フラッシュ	５倍	５０００円
フルハウス	７倍	７０００円
フォーカード	２０倍	２００００円
ストレートフラッシュ	５０倍	５００００円
ロイヤルストレートフラッシュ	１００倍	１０００００円

ここでは全部載せられないので④の計算について紹介する。

④初手「♡6 ♠7 ♠8 ◇K ♡10」のとき、◇の K を捨てて 9 が来ればストレートだが、それが最善手だろうか。

（１）ストレート狙いの「◇K」1 枚捨て捨てのとき

・ストレートになる確率は、残り 47 枚から 9 がでればよいので $\dfrac{4}{47}$

・ワンペアになる確率は、残り 47 枚から 6, 7, 8, 10 のいずれかがでればよいので $\dfrac{3\cdot 4}{47}=\dfrac{12}{47}$

・それ以外のカードが出るとノーカードなので、ノーカードの確率は上 2 つの事象の余事象だから $\dfrac{31}{47}$

・期待値は $\dfrac{4}{47}\cdot 4000+\dfrac{12}{47}\cdot 1000+\dfrac{31}{47}\cdot 0=596$（円）

（２）ストレート狙いの「◇K ♡10」2 枚捨てのとき

・ストレートになる確率は、(4, 5) (5, 9) (9, 10) のペアが出ればよいので $\dfrac{4\cdot 4+4\cdot 4+4\cdot 3}{{}_{47}C_2}=\dfrac{44}{1081}$

・ワンペアになる確率は、(i)6,7,8 のいずれか 1 枚とそれ以外の 1 枚がでるときと

(ii)新しく来た 2 枚が同じ数字の場合　　がある

(i)の確率は $\dfrac{9\cdot 38}{{}_{47}C_2}=\dfrac{342}{1081}$　(ii)の確率は $\dfrac{{}_3C_2\cdot 2+{}_4C_2\cdot 8}{{}_{47}C_2}=\dfrac{54}{1081}$　より　$\dfrac{342}{1081}+\dfrac{54}{1081}=\dfrac{396}{1081}$

・ツーペアになる確率は、6, 7, 8 の 2 種類が 1 枚ずつでればよいので $\dfrac{{}_9C_2-{}_3C_2\cdot 3}{{}_{47}C_2}=\dfrac{27}{1081}$

・スリーカードになる確率は、6, 7, 8 の 1 種類が 2 枚でればよいので $\dfrac{{}_3C_2\cdot 3}{{}_{47}C_2}=\dfrac{9}{1081}$

・他のカードが来たらノーカードになるので、求める期待値は

$$\frac{44}{1081}\cdot 4000+\frac{396}{1081}\cdot 1000+\frac{27}{1081}\cdot 2000+\frac{9}{1081}\cdot 3000=604\ (\text{円})$$