各班へのコメント（担任より）

1班（お見合い）

女子らしいテーマ選びとかわいらしいイラストを用いた資料が面白かったです。現在授業で学習している微分（関数の増減を調べて最大を探す）とか、積分（調和級数が対数で近似できることに面積を用いる）とか、これから学習する自然対数の底などが盛り込まれていて、聞いている生徒にもよい勉強になったのでは、と思います。また、人数が十分大きくない場合にもある程度の有用性があることが分かっていることが素晴らしいと思います。この問題は「最良選択問題」と呼ばれて解説されることが多いですが、実際に少ない人数で検証しているサイトは見つかりませんでした。

2班（$\sin 1^\circ$）

かなり早い段階から解答には肉薄していたようですが、最後のωを用いて3次方程式の複素数解を全て見つけるところが最大のブレイクスルーでしたね。スライドの資料にはありませんでしたが、「なぜ明らかに実数なのに、虚数単位を用いて表せるのか」という質問に対する返答はかっこよかったです。自然にみんなから拍手が沸き起こったのはさすが理数科、と思いました。$\sin 1^\circ$の真の値をプリントしたTシャツとか着てみたいなあ。

3班（じゃんけん）

この班の研究の素晴らしさは、期待値計算の漸化式に全て集約されているように思います。特に、「３人でじゃんけんをして１回目があいこだった場合は、残り$E(3)$回で終わる」という発想が素晴らしいです。私も考えたことのある問題ですが、この発想は最後までできませんでした。当日の発表ではスライド以外にも、聞いている人が理解しやすいように、等比数列の和の公式から無限等比級数の公式を導く方法を示した掲示資料などを用意するなど工夫していました。数学Ⅲでやる内容ですが、授業で説明する手間が省けて助かりました。

4班（球面幾何）

球面幾何の入門としてはよく調べられている。面積についてはよく分からない、と提出物にはあったが、研究ノートでは結論が出ていたのでは。たしか三角形の3つの内角を使って表せたと記憶している。球面上の一般の三角形についても、3つの内角を用いて辺の長さの関係が記述できると思うが、球面幾何では三角形の内角の和が不定なのが厄介。

5班（ヘロン）

５角形の２本の対角線を余弦定理で表して、代入によって文字を消去するアイディアが素晴らしいです。大学入試の問題にも活かせるアイディアですね。「～できない」系の命題の証明では、反例が１つ示せればよいので、$d=e$として７次方程式を５次方程式に下げる発想も、別の問題にも活かせると思います。研究内容の後半が完全に大学の内容（対称群、同型定理）なので、難しかったと思います。大学で線形代数学を学びながら、もう一度チャレンジしてほしいです。過去の論文のバックナンバーも参考にしながらよく頑張っていました。

6 班（源氏香）

n 個の異なるものを任意にグループ分けする方法が何通りあるかを表す数を「ベル数」といって B_n で表します。香木が n 個のときの答が何通りになるかは B_n で表せるはずです。ベル数の一般項をどう表すか、というのが今回の課題だったわけですね。「左端の香と同じものがいくつあるか」で場合分けして数えると、漸化式のようなものをつくることができそうです。例えば 5 個の香木の分け方のうち「左端の香と同じ香が他に 1 つある」ものが何個あるかを数えると、「①残り 4 個のうちどの 1 つと同じか」「②残りの 3 個の分け方はどうなっているか」を考えればよい。①については ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$ 通り、②については $B_3 = 5$ と等しいので、全部で 20 通りあるはずです。実際に一番上の源氏香の図から、「左端の香と同じ香が他に 1 つある」ものだけに○を付けて数えると 20 通りになるはず。

7 班（反転幾何）

自分たちで反転と似たオリジナルの「北高反転」を考えたのは、独創性があって面白い。時間があれば厳密な証明がほしい。数学Ⅱ「動点がつくる軌跡の方程式」の分野の問題であるので、ぜひ他の生徒にも挑戦してもらいたい。もともとの反転変換については私の卒業研究の一部だったのでとても懐かしい。古典幾何が好きな人は調べてみてください。「フォイエルバッハの定理」の証明はすごいと思います。

8 班（席替え）

ノートに大量の席替えの結果を書きながら、よく頑張っていました。書いた文字数はおそらくこの班がトップだったのでは。お疲れ様でした。上記のように、全員の席が変わるような順列を「完全順列」といって、n 人の完全順列が何通りあるかを表す a_n でつくられた数列を「モンモール数列」と言います。モンモール数列の一般項はインターネットで探すと出てくると思いますが Σ を含んだかなり複雑な式で、期待値計算には向かないように思います。期待値の計算をするときに知っていると役に立つ知識として「期待値の線形性」という性質があります。線形性というのは「和の期待値は、期待値の和」という意味。頑張れば証明できると思います。類似の問題として「クーポンコレクター問題」も有名なので、ぜひ調べてみよう。

9 班（ポーカー）

膨大な確率計算お疲れ様でした。いくつかの最善手は初心者では思いつかないような、直観とは違った結果になっていて面白かったです。それから、研究概要を流し読みしただけでは分かりませんが、期待値の計算の各所に計算を楽にするためのアイディアがちりばめられています。特に、確率の計算が得意になったのでは。